

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 1, kevät 2012

*Ennen laskarituntia saa tehtäviin apua tuutortuvasta (mat. laitos, 2. krs), erityisesti ti 11-12 ja ke 14-15, mutta myös muulloin. Paikalle voi tulla yksin tai porukalla.*

1. Todista, että funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + 3$  on tasaisesti jatkuva.
2. Anna esimerkki funktiosta joka jatkuva ja rajoitettu välillä  $]1, 2]$ , muttei tasaisesti jatkuva.
3. Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Todista, että  $f$  on jatkuva pisteessä 0 ja epäjatkuva kaikissa muissa pisteissä.

4. Määritellään funktio  $f : [-1, 0[ \cup ]0, 1]$  kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Millä  $t \geq 0$  funktio  $f$  on (a) jatkuva, (b) tasaisesti jatkuva joukossa  $[-1, -t[ \cup ]t, 1]$ ?

5. Olkoon  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  ja  $g : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ .
  - (a) Osoita, että funktio  $f$  on tasaisesti jatkuva joukossa  $[0, 3]$  mutta ei joukossa  $[0, \infty[$ .
  - (b) Osoita, että funktio  $g$  on tasaisesti jatkuva. Vihje: Osoita ensin, että  $\sqrt{t+s} \leq \sqrt{t} + \sqrt{s}$ , kun  $t, s \geq 0$ .

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 2, kevät 2012

- (a) Määrää sarjan  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{7^k}$  summa.  
(b) Millä arvoilla  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$  sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$  suppenee? Laske myös näillä arvoilla sen summa.

2. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos k)^k}{1+k^2}, \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{k}.$$

- Anna esimerkki suppenevasta sarjasta  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ ,  $x_k > 0$ , jolle  $\frac{x_{k+1}}{x_k} \rightarrow 1^+$ .
- Oletetaan, että  $x_k > 0$  kaikilla  $k = 1, 2, \dots$ . Tutki seuraavien väitteiden paikkansapitävyyttä:

(a) Jos  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  suppenee, niin  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$  suppenee.

(b) Jos  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  suppenee, niin  $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}$  suppenee.

- Geometrinen sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  on esimerkki sarjasta jonka termit ovat funktioita. Tässä tapauksessa voimme soveltaa jatkuvuuden käsitettä myös sarjoihin. 1800-luvulla, ennen kuin analyysin formalisointia, A. Cauchy (suppenemiskriteeristä tuttu) esitti sanallisen todistuksen seuraavalle väitteelle:

Jos funktiot  $f_k$  ovat jatkuvia pisteessä  $x_0$  ja  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$  suppenee (kaikilla  $x$ ), niin myös  $f$  on jatkuva pisteessä  $x_0$ .

Hänen perustelunsa oli seuraava:

Jokainen osasumma  $s_n(x)$  on jatkuva, joten kun  $x$  on lähellä  $x_0$ :aa, niin  $s_n(x)$  on lähellä  $s_n(x_0)$ :aa. Koska sarja suppenee, on  $s_n(x_0)$  lähellä  $f(x_0)$ :aa ja  $s_n(x)$  lähellä  $f(x)$ :aa. Siten  $f(x)$  on lähellä  $f(x_0)$ , joten  $f$  on jatkuva.

Kirjoita Cauchyn argumenttien pohjalta todistus joka toteuttaa modernit vaatimukset päättelyn täsmällisyydestä.

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 3, kevät 2012

1. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-1} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos(k\pi)}{3^k} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$$

itseisesti tai ehdollisesti.

2. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{2k+3}} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

itseisesti tai ehdollisesti.

3. Oletetaan, että  $x_k \geq x_{k+1} > 0$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}_+$  ja että  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$  suppenee. Osoita Cauchyn kriteerin avulla, että  $\lim_{k \rightarrow \infty} kx_k = 0$ .

4. Anna esimerkki suppenevasta vuorottelevasta sarjasta  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k x_k$ , missä  $x_k > 0$ , jolle  $k^s x_k \rightarrow \infty$  jokaiselle  $s > 0$ .

5. Tutki, suppeneeko sarja

$$1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5} - \dots;$$

siis  $x_k = -\frac{1}{k^3}$ , kun  $k$  on parillinen, ja  $x_k = \frac{1}{k}$ , muutoin. (Vihje: Tutki sarjan positiivisten ja negatiivisten termien muodostamia sarjoja.)

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 4, kevät 2012

- (a) Olkoon  $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Laske ylä- ja alasumma  $S_D$  ja  $s_D$  jaolle  $D = \{-2, -1, 0, 1\}$ .  
(b) Anna esimerkki funktiosta  $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jolle ylä- ja alasumma  $S_D$  ja  $s_D$  jaolla  $D = \{-2, -1, 0, 1\}$  ovat erisuuret, ja toinen funktio millä ne ovat yhtä suuret.
- Todista määritelmän avulla, että funktio

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva ja laske  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

- Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituva sekä  $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$  ja  $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ . Todista, että

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

- Tutkitaan funktiota  $f(x) = x^2$  välillä  $[-1, 1]$ . Määritä sellainen välin jako  $D$  että  $S_D - s_D < \frac{1}{100}$ .  
(Tässä, kuten yleensä,  $S_D$  viittaa funktion  $f$  yläsummaan,  $s_D$  alasummaan.)
- Määritellään  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{kun } x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{muuten.} \end{cases}$$

Osoita, että  $f$  on Riemann integroituva, ja laske  $\int_0^1 f(x) dx$ .

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 5, kevät 2012

1. Olkoon  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . Tutkitaan välin  $[0, 1]$  tasavälisiä jakoja  $D_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Laske  $S_{D_n}$  ja  $s_{D_n}$ , kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Laske myös raja-arvot

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{D_n} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_{D_n}.$$

2. Olkoon

$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Tutki, missä pisteissä funktio  $F: ]0, 3[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  on derivoituva ja laske  $F'(x)$  niissä pisteissä. Piirrä funktioiden  $f$  ja  $F$  kuvaajat.

3. Laske  $f'(x)$ , kun

$$(a) \quad f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt, \quad (b) \quad f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

4. Olkoot  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituvia funktioita. Osoita huolellisesti perustellen, että jos  $f(x) \leq g(x)$  kaikilla  $x \in [a, b]$ , niin

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Osoita lisäksi, että jos  $f(x) \geq 0$  kaikilla  $x \in [a, b]$ , niin  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  on kasvava. Jos  $f$  on jatkuva, millä toisella tavalla tämän kasvavuustuloksen voisi todistaa?

5. Sanomme, että funktio  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  on *rajoitetusti heilahteleva*, jos on olemassa kasvavat funktiot  $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että  $f = g - h$ . Osoita, että funktio on Riemann integroituva jos se on rajoitetusti heilahteleva.

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 6, kevät 2012

1. Määää funktion

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \sin(e^t) dt$$

paikalliset ääriarvokohdat. Saavuttaako  $f$  suurimman arvonsa välillä  $[1, 2]$ , entä pienimmän arvonsa?

2. Määrittele funktio  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  siten, että funktio  $F: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx,$$

toteuttaa ehdon  $F(x) = |x|$ . (Vihje: tarkastele erikseen tapauksia  $x < 0$  ja  $x \geq 0$ .)

Tutki, päteekö Lauseen 3.2.4 (Analyysin peruslause, osa I) väittämät (i) ja (ii) tälle funktiolle.

3. Mitkä ovat integraalin

$$\int_{-1}^1 |x|^{-\frac{1}{2}} dx,$$

epäoleellisuus kohdat? Suppeneeko epäoleellinen Riemann integraali?

4. Tutki, suppenevatko integraalit

$$(a) \int_1^\infty \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx.$$

5. Anna esimerkki funktiosta  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  jolle

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{-1+s}^{1-2s} f(x) dx \neq \lim_{s \rightarrow 0} \int_{-1+2s}^{1-s} f(x) dx.$$

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 7, kevät 2012

1. Tutki, millä  $s \in \mathbb{R}$  integraali

$$(a) \int_0^1 \frac{1+x}{x^s} dx, \quad (b) \int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

suppenee.

2. Muotoile ja todista majorantti- ja minoranttiperiaate ei-positiivisille funktioille.
3. Oletetaan, että  $f : ]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitettu ja, että se on Riemann integroitava jokaisella suljetulla välillä  $[c, b]$ ,  $a < c < b$ . Osoita, että funktion  $f$  epäoleellinen integraali välillä  $]a, b]$  suppenee.
4. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 8, kevät 2012

1. Olkoon  $f_n: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ 
  - (a) Todista, että jono  $(f_n)$  suppenee pisteittäin joukossa  $[0, \infty[$ .
  - (b) Todista, että jono  $(f_n)$  suppenee tasaisesti jokaisella välillä  $[0, b]$ , missä  $0 < b < 1$ .
  - (c) Todista, että jono  $(f_n)$  ei suppene tasaisesti välillä  $[0, 1]$ .
2. Olkoon  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Todista, että
  - (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ , missä  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ .
  - (b) jono  $(f_n)$  ei suppene tasaisesti kohti funktiota  $f$  joukossa  $\mathbb{R}$  (vaikka rajafunktio on jatkuva).
3. Olkoon  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Todista, että jono  $(f_n)$  suppenee tasaisesti kohti funktiota  $f$  joukossa  $\mathbb{R}$ , mutta jono  $(f_n^2)$  ei suppene tasaisesti kohti funktiota  $f^2$ .
4. Anna esimerkki jonosta  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jonka kaikki funktiot  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ovat epäjatkuvia jokaisessa pisteessä  $x \in [0, 1]$  ja joka suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .
5. Laske summafunktiot sarjoille

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$

## Sarjat ja integraalit

Harjoitus 9, kevät 2012

- (a) Määrittää sarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+1}$  suppenemissäde ja summafunktio.  
(b) Olkoon  $f(x) = (1+x)^a$ ,  $a \neq 0$ , ja oletetaan tunnetuksi, että  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ . Määrittää tämän perusteella kertoimet  $a_k$  (vihje: derivoi sarja, kerro luvulla  $1+x$  ja vertaa kertoimia).
- Laske derivaatta  $f^{(k)}(x_0)$ , kun

(a)  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $k = 42$ ,

(b)  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $k = 100$ ,

(c)  $f(x) = x^5 \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 0$ ,  $k = 2000$ .

- Tutki, millä  $x \in \mathbb{R}$  sarjat

(a)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k$ , (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{k+1}$

suppenevat.

- Johda seuraavat Taylorin sarjat käyttämällä annettuja yhtäsuuruuksia ja määrää sarjojen suppenemissäteet:

(a)  $\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ , *hyperbolinen sini*  $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

(b)  $\sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}$ ,  $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ .

(Muita hyperbolisia funktioita ovat  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$  ja  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ .)

- Olkoon potenssisarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  suppenemissäde  $R$ . Olkoot  $c \in \mathbb{R}$  ja  $n \in \mathbb{Z}_+$  vakioita. Määrittää potenssisarjojen

(a)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k x^k$ , (b)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}$ , (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$

suppenemissäteet. Huomaa, että tässä ei tiedetä, toimiiko suhde- tai juuritestit annetulle sarjalle.