

Analyysi I

Harjoitus 1, kevät 2010 (viikko 2)

1. Määrää huolellisesti perustellen supremum ja infimum joukoista

$$\text{a) } A :=]1, 2[\cup]4, 5] \quad \text{b) } B := \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

(kannattaa piirtää ensin kuva, jotta selviää, mikä vastaus on ennen kuin sitä yrittää perustella). Onko näillä joukoilla minimiä tai maksimia?

2. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}$ rajoitettuja joukkoja. Osoita, että myös $A \cup B$ on rajoitettu.
3. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}$. Määritellään joukko $-A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. Piirrä esimerkki joukoista A ja $-A$. Osoita, että $\sup A = -\inf(-A)$.
4. Todista, että

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty[= \emptyset.$$

5. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A on alhaalta rajoitettu ja että m on joukon A alaraja. Todista, että $m = \inf A$ jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x \in A$, että $x < m + \varepsilon$.

Opastus: Muokkaa luentojen lauseen 1.11 todistusta.

Analyysi I

Harjoitus 1, kevät 2010 (viikko 2)

1. Määrää huolellisesti perustellen supremum ja infimum joukoista

$$\text{a) } A :=]1, 2[\cup]4, 5] \quad \text{b) } B := \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

(kannattaa piirtää ensin kuva, jotta selviää, mikä vastaus on ennen kuin sitä yrittää perustella). Onko näillä joukoilla minimiä tai maksimia?

2. Olkoot $A, B \subseteq \mathbb{R}$ rajoitettuja joukkoja. Osoita, että myös $A \cup B$ on rajoitettu.
3. Olkoot $A \subseteq \mathbb{R}$. Määritellään joukko $-A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. Piirrä esimerkki joukoista A ja $-A$. Osoita, että $\sup A = -\inf(-A)$.
4. Todista, että

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} [n, \infty[= \emptyset.$$

5. Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, A on alhaalta rajoitettu ja että m on joukon A alaraja. Todista, että $m = \inf A$ jos ja vain jos jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $x \in A$, että $x < m + \varepsilon$.

Opastus: Muokkaa luentojen lauseen 1.11 todistusta.

Analyysi I

Harjoitus 2, kevät 2010 (viikko 3)

1. Todista huolellisesti perustellen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} 2^{-n} = 0.$$

2. Todista huolellisesti perustellen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Vihje: Käytä aritmeettisen summan kaavaa.

3. Osoita huolellisesti perustellen, että jono (x_n) , $x_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$ hajaantuu.
4. (a) Todista, että jos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$.
(b) Etsi esimerkki jonosta, jolle $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, mutta jolle raja-arvoa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ei ole olemassa.
(c) Todista, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ jos ja vain jos $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.
5. Tutki huolellisesti perustellen, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.
 - (a) Jos (x_n) ei ole rajoitettu, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ tai $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.
 - (b) Jos (x_n) ja (y_n) ovat rajoitettuja, niin $(x_n + y_n)$ on rajoitettu.
 - (c) Jos (x_n) ja (y_n) eivät ole rajoitettuja, niin $(x_n + y_n)$ ei ole rajoitettu.
- 6*. Oletetaan, että jokaisella alkuluvulla $p \geq 2$ tiedetään, että (osa)jono $(x_{pn})_{n=1}^{\infty}$ suppenee kohti lukua $a_p \in \mathbb{R}$. Voiko siitä päätellä, että jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ suppenee? Entä jos $a_p = a$ kaikilla p (eli raja-arvo on sama)?

Analyysi I

Harjoitus 3, kevät 2010 (viikko 4)

1. Olkoon

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = 2x_n + 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tutki, suppeneeko jono (x_n) .

2. Olkoon

$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Todista, että jono (x_n) suppenee ja määritä sen raja-arvo. (Huomaa, että koska funktio \sqrt{x} on jatkuva, niin $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{y_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, kun jono (y_n) suppenee.)

3. Olkoon $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \dots$

(a) Määritä joukko $\{x_n \mid n = 1, 2, \dots\}$.

(b) Tutki minkälaisia suppevia osajonoja jonolla (x_n) on.

4. Tutki huolellisesti perustellen, ovatko seuraavat väitteet tosia vai epätosia.

(a) Jos jono (x_n) on rajoitettu, niin jono $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ suppenee.

(b) Rajoitetun jonon kaikki osajonot ovat rajoitettuja.

(c) Hajaantuvan jonon kaikki osajonot hajaantuvat.

5. Bolzano–Weierstraßin lauseen todistuksessa todetaan, että ainakin toinen väleistä $[a_k, c_k]$ ja $[c_k, b_k]$ sisältää äärettömän monta jonon alkia. Onko mahdollista, että molemmat välit sisältävät äärettömän monta pistettä

(a) jollakin k ?

(b) kahdella k ?

(c) kaikilla k ?

Mitä kussakin tapauksessa voi päätellä siitä, suppeneeko jono?

6* Olkoon $x_n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, harjoituksen 2 tehtävän 3 jono. Laske raja-arvot

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \quad \text{ja} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right).$$

Analyysi I

Harjoitus 4, kevät 2010 (viikko 5)

1. Olkoon (x_n) jono sekä $(y_k) = (x_{2k})$ (parilliset indeksit) ja $(z_k) = (x_{2k-1})$ (parittomat indeksit) sen osajonoja. Oletetaan, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a.$$

Osoita, että myös $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

2. Olkoon $x_n = \frac{n}{n+13}$ ja $y_n = 1 - (-1)^n + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Todista Cauchyn jonon määritelmää käyttäen, että
 - a. (x_n) on Cauchyn jono; ja
 - b. (y_n) ei ole Cauchyn jono.

3–5. Vastaa funktiotestiin.

- 6*. Jono (x_n) toteuttaa ehdon $|x_n^2 - x_k^2| \leq \frac{k+n}{kn}$ aina, kun $n, k \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että (x_n^2) on Cauchyn jono. Seuraako tästä, että (x_n) on Cauchyn jono?

Analyysi I

Harjoitus 5, kevät 2010 (viikko 7)

1. Olkoot $A_k \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, avoimia joukkoja. Osoita, että niiden yhdiste $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ on avoin. Olkoon $n \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että leikkaus $\bigcap_{k=1}^n A_k$ on avoin.
2. Perustele tarkasti seuraavat väitteet:
 - (a) Joukko $] -1, 2[$ on avoin ja 2 on sen kasautumispiste.
 - (b) Joukko $[-1, 2]$ on suljettu.
 - (c) Joukko $] -1, 2]$ ei ole avoin eikä suljettu.
3. Määrä joukon $\left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid \left| \frac{m}{n} \right| < \sqrt{2} \right\}$ kasautumispisteet.
4. Todista huolellisesti perustellen, että $\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$ ja $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2} = 1$. Määritä sellainen $\delta > 0$, että

$$\left| \frac{1}{x^2} - 1 \right| < \frac{1}{1000}, \quad \text{kun } 0 < |x - 1| < \delta.$$

5. Olkoon

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \dots, \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tutki, ovatko seuraavat raja-arvot olemassa:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3/8} f(x), \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1/4} f(x), \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

- 6*. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Anna todistus tai vastaesimerkki.

- (a) Jos $A \subset \mathbb{R}$ on avoin, niin $A = \bigcup_{k=1}^{\infty}]a_k, b_k[$ jollakin $a_k, b_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
- (b) Jos $F \subset \mathbb{R}$ on suljettu, niin $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$ jollakin $a_k, b_k \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Analyysi I

Harjoitus 6, kevät 2010 (viikko 8)

1. Olkoon $c, c' > 0$ vakioita, $A \subset \mathbb{R}$ ja $x_0 \in A$. Oletetaan, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < c\epsilon \quad \text{aina kun } x \in A \text{ ja } |x - x_0| < c'\delta.$$

Osoita, että f on jatkuva pisteessä x_0 .

2. Olkoon

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Todista, että f on jatkuva pisteessä 0 ja epäjatkuva kaikissa muissa pisteissä.

3. Olkoon $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ja $g: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$.

- (a) Osoita, että funktio f on tasaisesti jatkuva joukossa $[0, 3]$ mutta ei joukossa $[0, \infty[$.
- (b) Osoita, että funktio g on tasaisesti jatkuva. Vihje: Osoita ensin, että $\sqrt{t+s} \leq \sqrt{t} + \sqrt{s}$, kun $t, s \geq 0$.

4. Oletetaan, että $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Todista, että jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$$

kaikilla $|x - x_0| < \delta$.

5. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, joka on jatkuva pisteessä 0 ja jolle pätee

$$|f(x)| \leq \frac{1}{|x|} \quad \text{kaikilla } x \neq 0.$$

Todista, että funktio f on rajoitettu.

6. Oletetaan, että $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat (koko joukossa \mathbb{R}) jatkuvia funktioita ja että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$. Todista, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Analyysi I

Harjoitus 7, kevät 2010 (viikko 9)

1. (a) Määrä sarjan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{7^k}$ summa.

(b) Millä arvoilla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{3}\}$ sarja $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+1}\right)^k$ suppenee? Laske myös näillä arvoilla sen summa.

2–3. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k}, & \text{(b)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 - 5k}, & \text{(c)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k + 7}, \\ \text{(d)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, & \text{(e)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos k)^k}{1+k^2}, & \text{(f)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{k}}{k}. \end{array}$$

4. Oletetaan, että $x_k > 0$ kaikilla $k = 1, 2, \dots$. Tutki seuraavien väitteiden paikkansapitävyyttä:

(a) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$ suppenee.

(b) Jos $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee, niin $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}$ suppenee.

5. Geometrinen sarja $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ on esimerkki sarjasta jonka termit ovat funktioita. Tässä tapauksessa voimme soveltaa jatkuvuuden käsitettä myös sarjoihin. 1800-luvulla, ennen kuin analyysin formalisointia, A. Cauchy (suppenemiskriteeristä tuttu) esitti sanallisen todistuksen seuraavalle väitteelle:

Jos funktiot f_k ovat jatkuvia pisteessä x_0 ja $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ suppenee (kaikilla x), niin myös f on jatkuva pisteessä x_0 .

Hänen perustelunsa oli seuraava:

Jokainen osasumma $s_n(x)$ on jatkuva, joten kun x on lähellä x_0 :aa, niin $s_n(x)$ on lähellä $s_n(x_0)$:aa. Koska sarja suppenee, on $s_n(x_0)$ lähellä $f(x_0)$:aa ja $s_n(x)$ lähellä $f(x)$:aa. Siten $f(x)$ on lähellä $f(x_0)$, joten f on jatkuva.

Kirjoita Cauchyn argumenttien pohjalta todistus joka toteuttaa modernit vaatimukset päättelyn täsmällisyydestä.

Analyysi I

Harjoitus 8, kevät 2010 (viikko 10)

1. Tutki suhde- tai juuritestin avulla seuraavien rajojen suppenemista:

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 5k} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^{k+1}}{k7^k} \quad (d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2^k}$$

2. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{3k-1} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos(k\pi)}{3^k} \quad (c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}$$

itseisesti tai ehdollisesti.

3. Tutki, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\sqrt{2k+3}} \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

itseisesti tai ehdollisesti.

4. Oletetaan, että $a > b > 0$. Tutki, suppeneeko sarja

$$a - \frac{b}{2} + \frac{a}{3} - \frac{b}{4} + \frac{a}{5} - \frac{b}{6} + \dots$$

Miksi Leibnizin lausetta ei voi soveltaa tämän sarjan suppenemisen tarkasteluun?

5. Oletetaan, että $x_k \geq x_{k+1} > 0$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}_+$ ja että $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenee.

Osoita Cauchyn kriteerin avulla, että $\lim_{k \rightarrow \infty} kx_k = 0$.

Analyysi I

Harjoitus 9, kevät 2010 (viikko 11)

- (a) Olkoon $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$. Laske ylä- ja alasumma S_D ja s_D jaolle $D = \{-2, -1, 0, 1\}$.
(b) Anna esimerkki funktiosta $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jolle ylä- ja alasumma S_D ja s_D jaolla $D = \{-2, -1, 0, 1\}$ ovat erisuuret, ja toinen funktio millä ne ovat yhtä suuret.
- Todista määritelmän avulla, että funktio

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva ja laske $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

- Todista määritelmän avulla, että funktio

$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{kun } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

on Riemann-integroituva ja laske $\int_0^2 f(x) dx$.

- Olkoon

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{kun } x = \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Todista, että f on Riemann-integroituva ja laske $\int_0^1 f(x) dx$.

- Sanomme, että funktio $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ on *rajoitetusti heilahteleva*, jos on olemassa kasvavat funktiot $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ siten, että $f = g - h$. Osoita, että funktio on Riemann integroituva jos se on rajoitetusti heilahteleva.
- Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integroituva sekä $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$ ja $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Todista, että

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

Analyysi I

Harjoitus 10, kevät 2010 (viikko 12)

1. Olkoon

$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{kun } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Tutki, missä pisteissä funktio $F:]0, 3[\rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ on derivoituva ja laske $F'(x)$ niissä pisteissä. Piirrä funktioiden f ja F kuvaajat.

2. Luentomonisteessa todistetaan, että pisteessä x_0 derivoituva funktio on myös jatkuva pisteessä x_0 . Oletetaan nyt, että $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva, jolloin siis myös f on jatkuva joukossa $]a, b[$. Onko f välttämättä tasaisesti jatkuva? Entä jos oletetaan lisäksi, että f' on rajoitettu tai jatkuva?

3. Laske $f'(x)$, kun

$$(a) \quad f(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt, \quad (b) \quad f(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt.$$

4. Määrä funktion

$$f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_1^x \sin(e^t) dt$$

paikalliset ääriarvokohdat. Saavuttaako f suurimman arvonsa välillä $[1, 2]$, entä pienimmän arvonsa?

5. Olkoot $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integroituvia funktioita. Osoita huolellisesti perustellen, että jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Osoita lisäksi, että jos $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ on kasvava. Jos f on jatkuva, millä toisella tavalla tämän kasvavuustuloksen voisi todistaa?

Analyysi I

Harjoitus 11, kevät 2010 (viikot 13 ja 14)

1. Tutki, millä $s \in \mathbb{R}$ integraali

$$(a) \int_0^1 \frac{1+x}{x^s} dx, \quad (b) \int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2} dx$$

suppenee.

2. Tutki, suppenevatko integraalit

$$(a) \int_1^\infty \frac{e^{\sin^2 x}}{\sqrt{x}} dx, \quad (b) \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^4} dx.$$

3. Muotoile ja todista majorantti- ja minoranttiperiaate ei-positiivisille funktioille.

4. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

5. Oletetaan, että $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on rajoitettu ja, että se on Riemann integroitava jokaisella suljetulla välillä $[c, b]$, $a < c < b$. Osoita, että funktion f epäoleellinen integraali välillä $]a, b]$ suppenee.

Analyysi I

Harjoitus 12, kevät 2010 (viikko 15)

1. Olkoon $f_n: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $n = 1, 2, \dots$
 - (a) Todista, että jono (f_n) suppenee pisteittäin joukossa $[0, \infty[$.
 - (b) Todista, että jono (f_n) suppenee tasaisesti jokaisella välillä $[0, b]$, missä $0 < b < 1$.
 - (c) Todista, että jono (f_n) ei suppene tasaisesti välillä $[0, 1]$.
2. Olkoon $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Todista, että
 - (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, missä $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
 - (b) jono (f_n) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f joukossa \mathbb{R} (vaikka rajafunktio on jatkuva).
3. Anna esimerkki jonosta $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, jonka kaikki funktiot f_n , $n = 1, 2, \dots$, ovat epäjatkuvia jokaisessa pisteessä $x \in [0, 1]$ ja joka suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Olkoon $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, ja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Todista, että jono (f_n) suppenee tasaisesti kohti funktiota f joukossa \mathbb{R} , mutta jono (f_n^2) ei suppene tasaisesti kohti funktiota f^2 .
5. Laske summa
 - (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k3^k}$
 - (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} 3^k$.
- 6*. Osoita, että sarja $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^2 + k}{k^2}$ suppenee tasaisesti jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$, mutta ei suppene itseisesti millään muuttujan x arvolla. (Vihje: Leibnizin lause osoittautuu hyödylliseksi.)

Analyysi I

Harjoitus 13 & 14, kevät 2010 (viikot 16–17)

1. Tutki, millä $x \in \mathbb{R}$ sarjat

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^{k+1}} x^k, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x-2)^k}{k+1}$$

suppenevat.

2. Laske summafunktiot sarjoille

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$

3. (a) Määrä sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k+1}$ suppenemissäde ja summafunktio.
(b) Olkoon $f(x) = (1+x)^a$, $a \neq 0$, ja oletetaan tunnetuksi, että $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Määrä tämän perusteella kertoimet a_k (vihje: derivoi sarja, kerro luvulla $1+x$ ja vertaa kertoimia).
4. Johda seuraavat Taylorin sarjat käyttämällä annettuja yhtäsuuruuksia ja määrää sarjojen suppenemissäteet:

$$(a) \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \text{hyperbolinen sini } \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$(b) \sin^2 x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x).$$

(Muita hyperbolisia funktioita ovat $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ja $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$.)

5. Olkoon potenssisarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ suppenemissäde R . Olkoot $c \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}_+$ vakioita. Määrä potenssisarjojen

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} a_k c^k x^k, \quad (b) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{nk}, \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+n}$$

suppenemissäteet. Huomaa, että tässä ei tiedetä, toimiiko suhde- tai juuritestit annetulle sarjalle.

6. Anna esimerkki potenssisarjasta jonka summalle f pätee

$$(a) f(0) = 0, f(1) = 2, \quad (b) f'(0) = 0, f(1) = 2,$$

Voiko potenssisarjan vaita niin, että sen suppenemissäde on 1? Tai ∞ ?

7. (a) Määrää sarjan $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ suppenemissäde.

(b) Osoita, että $f'(x) = f(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja että $f(0) = 1$.

(c) Päättelä (b)-kohdan perusteella, että $f(x) = e^x$. (Ohje: derivoi $f(x)e^{-x}$.)

8. Laske derivaatta $f^{(k)}(x_0)$, kun

$$(a) f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0, \quad k = 42,$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, \quad x_0 = 1, \quad k = 100,$$

$$(c) f(x) = x^5 \ln(1+x), \quad x_0 = 0, \quad k = 2000.$$

9. Määrää funktioiden

$$\sin x \quad \text{ja} \quad \cos x$$

Taylorin sarjat pisteessä $x_0 = 0$. Todista, että nämä sarjat suppenevat kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

10. Määrää, mikäli mahdollista, funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ sarjaesitys pisteessä

$$(a) x_0 = -1, \quad (b) x_0 = 0, \quad (c) x_0 = 1.$$

11. Laske Taylorin sarjojen avulla raja-arvot

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{(e^x - 1)^3}.$$

12*. Muodosta Taylorin sarja pisteessä 0 funktiolle

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2}.$$

Johda tämän avulla sarjaesitys integraalille $\int_0^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$, ja laske integraalille

$$I = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-t^2} dt$$

likiarvo, joka eroaa oikeasta arvosta vähemmän kuin 10^{-6} .