



# ANALYYSI II

800322A

Matemaattisten tieteiden laitos

Luentomoniste työn alla: viimeksi muutettu 9.11.2007



## Sisältö

Alkusanat	iii
Suosituksia opiskelutavoista	iii
Luku 1. Johdanto	1
1. Funktiot ja kuvaukset $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$	2
2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoista ja topologiasta	6
3. Raja-arvoista	7
Luku 2. Derivaatta ja sen ominaisuudet	11
1. Kuvauksen jatkuvuus ja derivaatan määritelmä	11
2. Osittaisderivaatat	13
3. $C^1$ -funktiot	16
4. Ketjusääntö	18
5. Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat	20
6. Taylorin kehitelmä ja Taylorin polynomi	22
Luku 3. Käyrät ja polut, eli kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$	27
1. Kuvaukset $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$	27
2. Käyrä, yksinkertainen kaari ja polku	28
Luku 4. Funktioiden erityispiirteitä, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$	31
1. Gradientti ja suunnattu derivaatta	31
2. Gradienttivektorin geometrinen tulkinta	33
3. Virheen arviointia	36
4. Implisiittifunktioista	37
5. Paikalliset ääriarvot	39
6. Globaalit ääriarvot	43
7. Sidotut ääriarvot	44
Luku 5. Kaksinkertainen integraali tasossa $\mathbb{R}^2$	49
1. Funktion integraali yli suorakulmion	49
2. Nollajoukko	52
3. Funktion integraali yli $\mathbb{R}^2$ :n rajoitetun osajoukon	53
4. Muuttujan vaihto kaksinkertaisessa integraalissa	57
Luku 6. Polkuintegraali ja kaari-integraali	63
1. Reaalifunktion polkuintegraali	63
2. Vektorikentän polkuintegraali	67
3. Integraalilaskennan peruslause	68
4. Kaari-integraali eli viivaintegraali	70
5. Greenin lause	71
Hakemisto	77



## Alkusanat

Tämä luentomoniste on tarkoitettu käytettäväksi Oulun yliopiston Matemaattisten tieteiden laitoksen kurssilla Analyysi 2.

Monisteen alkuperä on Vesa Mustosen luennoissa, ja alkuperäisestä kirjoitustyöstä vastasi Janne Oinas. Syksyllä 2006 kurssin rakenne muuttui sen verran paljon, että oli mielekästä ruveta kokoamaan materiaalin uudella tavalla, samalla kun osa käsitellyistä asioista vaihdettiin. Tämä uusimis prosessi jatkuu edelleen, ja kaikki (konstruktiiviset) kommentit ovat tervetulleita.

Uudistamistyössä on ainakin seuraavat tavoitteet:

- Lisätä lauseiden ja esimerkkejen ympärille vähän enemmän kokoavaa tekstiä.
- Kytkeä differentioituvuuden määritelmä tiiviimmin yhteen approksimaation kanssa.
- Selkeyttää integraalilaskennan osalta työnjakoa tämän kurssin ja Analyysi 3:n välillä.

### Suosituksia opiskelutavoista

Kurssilla yleistetään monta differentiaali- ja integraalilaskun, Perusmetodit I ja Analyysi I kursseilta tuttua, työkalua yhdestä ulottuvuudesta useampaan ulottuvuuteen. Koska nämä asiat, erityisesti integraalit käydään syvällisellä ja modernilla tavalla läpi kurssilla Analyysi III, ei tällä kurssilla ole samanlaista painotusta todistuksiin kuin kursseilla Analyysi I ja III.

Tärkeätä on sen sijaan käsitteellisen ymmärryksen kehittäminen ja ongelman ratkaisutaidot. Luennolla esitetään usein uuteen käsitteeseen liittyen vain yksi tai muutama esimerkki: mikäli tämä ei ole riittävää kannattaa omatoimisesti generoida yksinkertaisia tehtäviä joissa testaa käsitteen tai määritelmän toimivuutta. Esimerkiksi jokaisen kuvauksia koskevan käsitteen kohdalla kannattaa selvittää itselleen, mitä se tarkoittaa lineaarikuvauksen tapauksessa.

Kurssin harjoitustehtävät kannattaa ehdottomasti yrittää ratkaista itsenäisesti tai ryhmässä. Pidä mielessä, että ongelma on määritelmän mukaan tehtävä jolle ei ole heti nähtävissä ratkaisu. Koska tavoitteena on harjoitella ongelman ratkaisu, on osa tehtävistäkin sellaisia, että niitä joutuu mitettimään. Tätä ei voi välttää, sillä matemaattisia ongelmia oppii ratkomaan ainoastaan ratkomalla niitä.

Kurssin oheislukemistoksi sopii melkein mikä tahansa kirja jonka nimi on "Calculus of Several Variables", tms. Esimerkiksi seuraavat kirjat löytyvät Oulun yliopiston kirjastoista:

- R. Ellis: Calculus one and several variables
- C. Goffman: Calculus of several variables
- S. Lang: Calculus of several variables
- A. Persson & L.-C. Böiers: Analys i flera variabler
- V. Purmonen: Differentiaali- ja integraalilaskentaa usean reaaliuuttujan funktioille

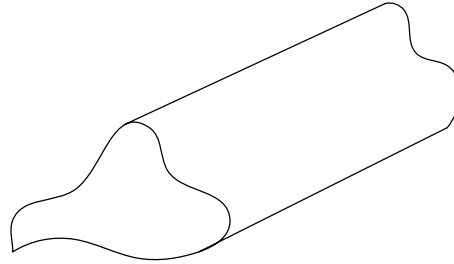
- S. Salas: Calculus one and several variables with analytic geometry

## LUKU 1

### Johdanto

Usean muuttuja differentiaali- ja integraalilaskennassa otetaan käyttöön lukiossa ja peruskursseilla kehitetyt menetelmät kahden ja kolmen ulottuvuuden ongelmissa. Ottaen huomioon, että elämme (ainakin) kolmeulotteisessa avaruudessa, on tämä yleistys varsin luonnollinen ja käytännön sovellusten kannalta tärkeä. Tässä on kolme fysikaalista esimerkkiä siitä, mihin tämän kurssin menetelmät voidaan soveltaa.

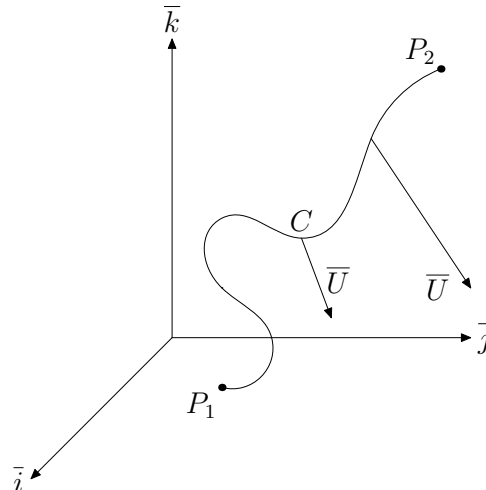
- a) Lämpötila  $T$  kolmiulotteisessa tilassa riippuu paikasta eli koordinaateista  $x$ ,  $y$  ja  $z$ . Siis  $T = T(x, y, z)$ . Lämpötila voi riippua myös ajasta  $t$ , jolloin  $T = T(x, y, z, t)$ . Malliongelmia: missä tilan pisteessä lämpötila on suurin tai pienin ja mihin suuntaan lämpötila muuttuu voimakkaimmin?
- b) Annetun materiaalikappaleen tiheys  $\rho$  riippuu koordinaateista  $x$ ,  $y$  ja  $z$ . Siis  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Malliongelma: miten kappaleen massa, painopiste ja hitausmomentti voidaan määrätä tai laskea kappaleen tiheyden avulla?



- c) Sähköinen voimakenttä (magneettikenttä, vetovoimakenttä). Kuhunkin tila-avaruuden  $(x, y, z)$  pisteeseen liittyy vektori  $\mathbf{U} = \mathbf{U}(x, y, z)$ , joka ilmaisee voiman suunnan ja suuruuden. Siis

$$\mathbf{U}(x, y, z) = (u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z)).$$

Malliongelmia: mikä työ on tehtävä, jotta annettu pistemäinen varaus siirtyisi pisteestä  $P_1$  pisteeseen  $P_2$  käyrää  $C$  pitkin?



Differentiaali- ja integraalilaskenta on alunperin kehitetty nimenomaan tämän tyyppisten fysikaalisten suureiden kuvaamiseen. Samat menetelmät ovat kuitenkin myöhemmin osoittautuneet hyödylliseksi myös esim. taloustieteilien mallien tutkimisessä. Näissä tapauksissa ongelman ulottuvuudet eivät yleensä vastaa fysikaalisia ulottuvuuksia. Esimerkkinä, muuttuja  $x_i$  saattaa kuvata kuinka paljon yritys ostaa raaka-ainetta  $i$ . Jos yritys tarvitsee tuotantoon varten 73 raaka-ainetta voidaan ostettua raaka-ainetta kuvata 73 ulotteisella vektorilla  $(x_1, \dots, x_{73})$  avaruudessa  $\mathbb{R}^{73}$ .

Koska haluamme kattaa myös jälkimmäisentyypiset tilanteet kehitämme tällä kursilla teorianne yleensä avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ .

### 1. Funktiot ja kuvaukset $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$

Seuraavia merkintäsopimuksia käytetään läpi luentomonisteen. Reaalimuuttujia merkitään pienillä kirjaimilla. Esimerkiksi

$$x, y, z, x_1, x_2, x_3, \dots, t, s$$

ovat reaalimuuttujia. Vektorimuuttujia merkitään pienillä lihavoiduilla kirjaimilla. Esimerkiksi

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \dots$$

ovat vektorimuuttujia. Joukkoja merkitään isoilla kirjaimilla yleensä aakosten alkupäästä,  $A, B$ , jne. Vektorilla tarkoitetaan aina pystyvektoria:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Vektoreille ja matriiseille käytetään aina hakasulkuja. Pystyvektorien kirjoittaminen vie kuitenkin paljon tilaa. Tästä syystä käytämme myös lyhennettyä merkintää:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, \dots, x_n).$$

Huomaa kaarisulut ja pilkut.

Ennen funktioiden merkintäsopimusten esittelyä palautetaan mieleen mitä funktiolla tarkoitetaan. Pitkän kiistelyn jälkeen funktiosta vakiintui seuraava käsitys 1800-luvun lopulla: kun  $A$  ja  $B$  ovat joukkoja sanotaan, että  $f$  on funktio joukosta  $A$  joukolle  $B$  jos jokaiselle  $a \in A$  on määrätty täsmälleen yksi kuva-alkio  $b \in B$ . Alkion  $a$  kuvaa merkitään tavallisesti  $f(a)$ . Huomaa, että tässä ei ole mitenkään rajoitettu, miten alkio  $a$  määrää alkion  $b$ . Lisäksi on huomattavaa, että funktion täydellisessä määritelmässä on aina kerrottava lähtö- ja maalijoukot. Tässä on kaksi esimerkkiä funktioista:

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(k) = k^2 + 2$$

ja

$$g: \{\text{kaikki ihmiset}\} \rightarrow \{\text{kaikki ihmiset}\}, g(\text{henkilö } A) = \text{henkilön } A \text{ äiti.}$$

Differentiaali- ja integraalilaskennassa meitä kiinnostavat funktiot joilla lähtö- ja maalijoukot ovat Eukliidisia avaruuksia. Differentiaali- ja integraalilaskennassa tarkoitetaan usein funktiolla nimenomaan reaaliarvoisia funktioita jonka lähtöjoukko on reaaliavaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukko. Tätä sopimusta käytetään myös aina tällä kursilla. Tällaisia funktiota merkitään pienillä aksentoimattomilla kirjaimilla. Esimerkiksi yhtälöillä

$$f(x, y, z) = x + \sin(yz), \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

ja

$$g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2} \quad g : (\mathbb{R}^+)^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

määritellyt kuvaukset  $f$  ja  $g$  ovat reaaliarvoisia kuvauksia. Jotta reaaliarvoiset kuvaukset erottuisivat selvästi vektoriarvoisista kuvauksista, niin *vektoriarvoisia kuvauksia* merkitään isoilla kirjaimilla. Siis

$$F, G, H, \dots$$

ovat vektoriarvoisia funktioita. Esimerkkinä vektoriarvoisista kuvauksista annetaan kuvaus  $F : \mathbb{R}^3 \supset D \rightarrow \mathbb{R}^2$ , joka määritellään kaavalla

$$F(x_1, x_2, x_3) = \left( \sqrt{1 - x_3^2}, x_1 x_2 x_3 \right) := (f_1(x_1, x_2, x_3), f_2(x_1, x_2, x_3)).$$

Relaatioilla  $f_1(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{1 - x_3^2}$  ja  $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$  määriteltyjä kuvauksia kutsutaan funktion  $F$  *koordinaattifunktioiksi*. Mikä on  $F$ :n määrittäjäalue?

Funktioita  $F : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) sanotaan fysiikassa *vektorikentiksi* (vector field) (varsinaisesti, kun  $n = 3$ ). Tämänlaisia kuvauksia ovat esimerkiksi koordinaatiston vaihtokuvaukset  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Kuvauksia  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sanotaan *skalaarikentiksi* (scalar field).

Jotta välttyttäisiin tulevaisuudessa kömpelöltä merkinnältä  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tehdään sopimus, että  $D^n$  merkkää aina  $\mathbb{R}^n$ :n osajoukkoa. Nyt voimme siis yksinkertaisesti kirjoittaa  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Funktio  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  asettaa jokaista funktion määrittäjäjoukon  $D^n$  pistettä  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  vastaamaan yksikäsitteisesti määrätyn pisteen  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  joukosta  $\mathbb{R}^p$ . Jälkimmäistä pistettä kutsutaan pisteen  $\mathbf{x}$  kuvapisteksi ja merkitään  $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$ . Lisäksi merkitään

$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_p(\mathbf{x})) = (y_1, y_2, \dots, y_p) = \mathbf{y}.$$

Toisin sanoen

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_p = f_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}.$$

Reaaliarvoisia kuvauksia  $f_i : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , sanotaan  $F$ :n *koordinaattifunktioiksi* (coordinate functions).

Jos  $p \geq 2$ , niin  $F$  on *vektoriarvoinen funktio* (vector-valued function). Jos taas  $p = 1$ , niin  $F$  on reaaliarvoinen funktio (vain yksi koordinaattifunktio) ja tällöin merkitään sopimuksen mukaan kuvausta  $F$  pienellä kirjaimella  $f$ .

*Esimerkkejä.*

(1)  $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ . Lauseke on mielekäs jokaisella vektorilla  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

(2) Olkoon  $f(x, y) = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ . Jos haluamme määrittellä reaaliarvoisen funktion, on määrittäjäjoukko  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ , tai  $D$ :n osajoukko.

tapa havainnollistaa funktiota  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on

Funktioita  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan havainnollistaa *tasa-arvokäyrien* eli *sama-arvokäyrien*

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}, \quad c \in f(D)$$

(level curves) avulla. Jos joukko  $f^{-1}(c)$  on pinta, niin sitä kutsutaan *tasa-arvopinnaksi* (level surface).

*Esimerkki.* Olkoon  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty kaavalla  $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ . Nyt  $f(\mathbb{R}^2) = [0, \infty[$ . Jos  $c^2 > 0$ , niin  $f^{-1}(c^2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 = c^2\}$  eli sama-arvokäyrä on ellipsi. Jos  $c = 0$ , niin  $f^{-1}(c) = \{(0, 0)\}$ .

Funktion  $f : D^3 \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaaja (graph) on joukko

$$\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid w = f(x, y, z), (x, y, z) \in D\}.$$

Tämänlaisen funktion *tasa-arvojoukot* (level set)

$$f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

ovat usein avaruuden  $\mathbb{R}^3$  pintoja.

*Esimerkki.* Olkoon  $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$  jokaisella  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Tutki funktion  $f$  tasa-arvokäyriä.

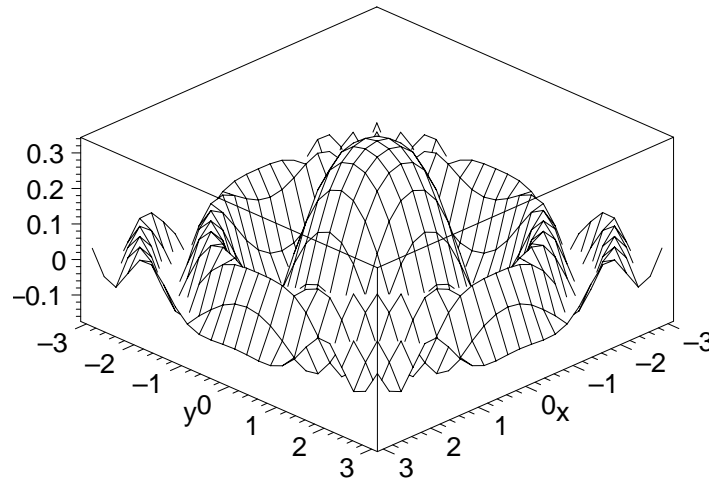
Yleisesti funktion  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  kuvaaja on avaruuden  $\mathbb{R}^{n+1}$  osajoukko

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = f(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \in D^n\}.$$

Eräissä tapauksissa funktion kuvaaja voidaan ”piirtää”. Esimerkiksi funktion

$$f(x, y) = \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 3}$$

kuvaaja voidaan piirtää (itse asiassa vain osa kuvaajasta).



Huomaa, että akselien skaalausta on muutettu, jotta funktion kuvaajasta saataisiin havainnollisempi mielikuva. Akselien erilainen skaalaus yleensä vääristää todellista kuvaa, joten on hyvin tärkeää merkitä akselien mittakaavat näkyviin.

Eräs erikoistapaus funktioista  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  saadaan silloin, kun  $n = 1$  ja  $p \geq 2$ . Siis

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)), \quad t \in D^n \subset \mathbb{R}.$$

Jos  $p = 2$ , niin  $F(t) = (f_1(t), f_2(t))$  ja kuvauksen  $F$  arvojoukko on yleensä tasokäyrä. On kuitenkin olemassa jatkuva kuvaus  $G : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , jonka arvojoukko on neliö avaruudessa  $\mathbb{R}^2$ .

Jos  $p = 3$ , niin  $F(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  ja kuvauksen  $F$  arvojoukko on avaruuskäyrä.

*Esimerkki.* Olkoot  $F(t) = (x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ja  $x_0, y_0, \alpha, \beta$  vakioita. Piirrä funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  kuvaaja.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(t) = (a \cos t, b \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Piirrä funktion  $F$  kuvaaja.

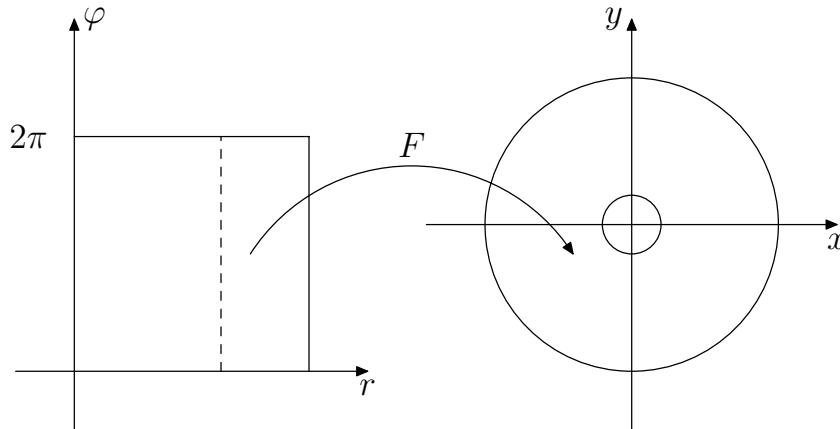
**Määritelmä 1.1.** Kuvaus  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on *injektio*, jos eri vektoreilla on aina eri kuvat eli ehdoista  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^n$  ja  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$  seuraa  $F(\mathbf{x}) \neq F(\mathbf{y})$ . Kuvaus  $F$  on *surjektio*, jos  $F(D^n) = \mathbb{R}^p$ , ja  $F$  on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

Huomaa, että injektivisyys voidaan määritellä yhtäpitävästi myös seuraavalla tavalla. Kuvaus  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on injektio, jos ehdoista  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^n$  ja  $F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{y})$  seuraa yhtälö  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .

*Esimerkki.* Avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  määritellään koordinaatiston vaihtokuvaus suorakulmaisesta koordinaatistosta napakoordinaatistoon kaavoilla

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{cases},$$

missä  $x$  ja  $y$  ovat pisteen koordinaatit suorakulmaisessa koordinaatistossa,  $r \geq 0$  ja  $\varphi \in [0, 2\pi[$ . Määritellään kuvaus  $F : A^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  yhtälöllä  $F(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Olkoon  $A^2 = \{(r, \varphi) \mid r > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ . Nyt  $F(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Onko  $F : A^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bijektio?



Annetuista funktioista saadaan uusia funktioita sallituilla laskutoimituksilla. Olkoot  $F, G : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Tällöin funktioiden  $F$  ja  $G$  summa määritellään yhtälöllä

$$(F + G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) + G(\mathbf{x}) \quad \text{jokaisella } \mathbf{x} \in D^n.$$

Jos  $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ , niin kuvaus  $gF$  määritellään yhtälöllä

$$(gF)(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})F(\mathbf{x}) \quad \text{jokaisella } \mathbf{x} \in D^n.$$

Erityisesti

$$(kF)(\mathbf{x}) = kF(\mathbf{x}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in D \quad \text{ja } k \in \mathbb{R}.$$

Mikäli  $p = 3$ , niin voidaan määritellä myös kuvausten  $F$  ja  $G$  ristitulo  $F \times G$  kaavalla

$$(F \times G)(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}) \times G(\mathbf{x}) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in D.$$

Olkoot  $G : D^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Kuvauksien  $G$  ja  $F$  yhdistetty kuvaus  $F \circ G : D^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  määritellään kaavalla

$$(F \circ G)(\mathbf{x}) = F(G(\mathbf{x})) \quad \text{jokaisella } \mathbf{x} \in D^m.$$

*Esimerkki.* Olkoon kuvaus  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  määritelty kaavalla  $G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, |x_3|)$  ja kuvaus  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  määritelty kaavalla  $F(s, t) = (s^2, -t^2)$ . Tällöin

$$(F \circ G)(x_1, x_2, x_3) = F(G(x_1, x_2, x_3)) = F(x_1 - x_2, |x_3|) = ((x_1 - x_2)^2, -x_3^2).$$

## 2. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukoista ja topologiasta

**Määritelmä 1.2.** Olkoot  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  ja  $r > 0$  annetut. Avaruuden  $\mathbb{R}^n$   $\mathbf{a}$ -keskinen  $r$ -säteinen avoin pallo  $B(\mathbf{a}, r)$  määritellään joukoksi

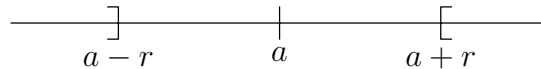
$$B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r\}.$$

Koska

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < r \Leftrightarrow (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < r^2,$$

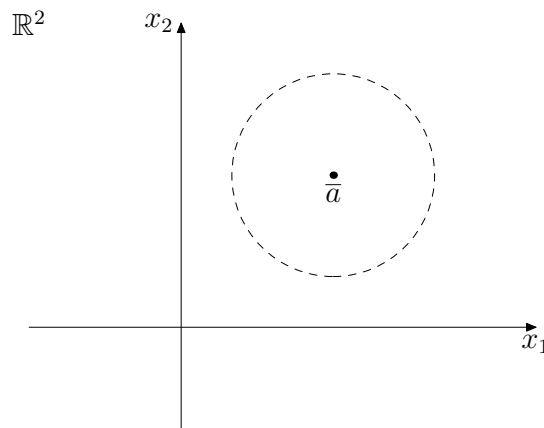
niin tapauksissa  $n = 1, 2, 3$  saadaan geometrinen tulkinta.

Jos  $n = 1$ , niin  $B(\mathbf{a}, r)$  on avoin väli  $]a - r, a + r[$ .

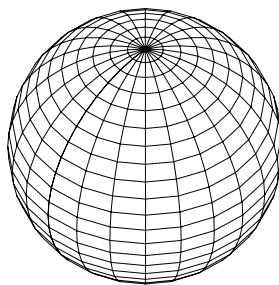


Jos  $n = 2$ , niin  $B(\mathbf{a}, r)$  on avoin  $\mathbf{a}$ -keskinen  $r$ -säteinen kiekko (disc) eli

$$B(\mathbf{a}, r) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}.$$



Jos  $n = 3$ , niin  $B(\mathbf{a}, r)$  on avoin pallo (ball).



**Määritelmä 1.3.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukkoa  $U$  sanotaan pisteen  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  *ympäristök-  
si* (neighbourhood) mikäli joukko  $U$  sisältää jonkin  $\mathbf{a}$ -keskisen avoimen pallon. Toisin sanoen, on olemassa sellainen  $r > 0$ , että  $B(\mathbf{a}, r) \subset U$ .

**Määritelmä 1.4.** Olkoon  $M \subset \mathbb{R}^n$  jokin osajoukko. Sanotaan, että piste  $\mathbf{a}$  on joukon  $M$  *sisäpiste* (interior point), jos on olemassa  $\mathbf{a}$ -keskinen avoin pallo, joka sisältyy joukkoon  $M$ . Joukon  $M$  sisäpisteiden joukkoille käytetään merkintää  $\text{Int } M$ .

**Määritelmä 1.5.** Piste  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$  on joukon  $M$  *reunapiste* (boundary point) mikäli jokin  $\mathbf{a}$ -keskinen avoin pallo sisältää sekä joukon  $M$  että joukon  $M$  komplementin  $M^c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin M\}$  pisteitä. Joukon  $M$  *reuna* (boundary, frontier)  $\partial M$  on joukon  $M$  reunapisteiden joukko.

**Määritelmä 1.6.** Sanotaan, että joukko  $M \subset \mathbb{R}^n$  on *avoin* (open), jos kaikki joukon  $M$  pisteet ovat sen sisäpisteitä eli  $M = \text{Int } M$ . Toisaalta, sanotaan, että  $M$  on *suljettu* (closed), jos sen komplementti  $M^c$  on avoin.

Harjoitustehtäväksi jää osoittaa, että joukko  $M$  on avoin tarkalleen silloin, kun  $\partial M \subset M^c$ , ja että joukko  $M$  on suljettu täsmälleen silloin, kun  $\partial M \subset M$ .

*Huomautus 1.7.* Avaruudella  $\mathbb{R}^n$  ei ole reunaa eli  $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$ . Siis  $\partial\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$  ja  $\partial\mathbb{R}^n \subset (\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$ . Edellisen perustelun nojalla avaruus  $\mathbb{R}^n$  on avoin ja suljettu, mistä päätellään edelleen, että  $\emptyset = (\mathbb{R}^n)^c$  on avoin ja suljettu.

Huomaa, että on olemassa joukkoja, jotka eivät ole avoimia eivätkä suljettuja.

*Esimerkkejä.*

- (1) Avoin pallo  $B(\mathbf{a}, r)$  on avoin joukko.
- (2) Suljettu pallo  $\mathbf{B}(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{a} - \mathbf{x}| \leq r\}$  on suljettu joukko.
- (3) Pallon pinta  $S(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{a} - \mathbf{x}| = r\} = \partial B(\mathbf{a}, r)$  on suljettu joukko.
- (4) Joukko  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$  ei ole avoin eikä suljettu.

**Määritelmä 1.8.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukkoa  $M$  sanotaan *rajoitetuksi* mikäli on olemassa sellainen  $R > 0$ , että  $M \subset B(\mathbf{0}, R)$ . Joukko  $M \subset \mathbb{R}^n$  on *kompakti*, jos se on suljettu ja rajoitettu.

### 3. Raja-arvoista

Seuraavaksi tarkastellaan funktioiden raja-arvoja. Ensiksi esitetään eräs määritelmä.

**Määritelmä 1.9.** Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^p$  ja  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ . Piste  $\mathbf{a}$  on joukon  $D$  *kasautumispiste* (accumulation point), jos jokainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö sisältää  $\mathbf{a}$ :sta eriäviä joukon  $D$  pisteitä eli jokaisella  $\delta > 0$  pätee  $(B(\mathbf{a}, \delta) \setminus \{\mathbf{a}\}) \cap D \neq \emptyset$ .

**Määritelmä 1.10.** Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja olkoon  $\mathbf{a}$  jokin  $D^n$ :n kasautumispiste. Sanotaan, että funktiolla  $F$  on *raja-arvo*  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$  pisteessä  $\mathbf{a}$ , jos jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen luku  $\delta(\varepsilon) = \delta > 0$ , että ehdoista  $\mathbf{x} \in D$  ja  $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$  seuraa  $|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$ . Tällöin merkitään

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \quad \text{tai} \quad F(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{b}, \quad \text{kun} \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}.$$

**Lause 1.11.** Oletetaan, että  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$ . Merkitään  $F = (f_1, f_2, \dots, f_p)$  ja  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_p)$ . Tällöin ehdot

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

ja

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{jokaisella} \quad i = 1, 2, \dots, p$$

ovat yhtäpitäviä

TODISTUS. Oletetaan, että  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ , ja olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Nyt millä tahansa  $i = 1, 2, \dots, p$

$$|f_i(\mathbf{x}) - b_i| \leq |F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon,$$

kun  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$  ja  $\mathbf{x} \in D$ . Siis lauseen ensimmäinen osa on todistettu.

Osoitetaan lauseen toinen osa. Oletetaan, että

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f_i(\mathbf{x}) = b_i \quad \text{jokaisella} \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

ja olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Nyt voidaan valita  $\delta > 0$  sillä tavalla, että  $|f_i(\mathbf{x}) - b_i|^2 < \frac{\varepsilon^2}{p}$  jokaisella  $i = 1, \dots, p$ , kun  $0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$  ja  $\mathbf{x} \in D$ . Tällöin

$$|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}|^2 = |f_1(\mathbf{x}) - b_1|^2 + \dots + |f_p(\mathbf{x}) - b_p|^2 < \frac{\varepsilon^2}{p} + \dots + \frac{\varepsilon^2}{p} = \varepsilon^2,$$

mistä väite seuraa. □

Jos  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja joukko  $D$  ei ole rajoitettu, niin voidaan tutkia kuvauksen  $F$  käyttäytymistä, kun  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  ja  $\mathbf{x} \in D^n$ .

**Määritelmä 1.12.** Oletetaan, että  $D \subset \mathbb{R}^n$  on rajoittamaton joukko ja  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Tällöin kuvauksella  $F$  on raja-arvo ”äärettömässä” mikäli jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen vakio  $M > 0$ , että  $|F(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \varepsilon$  aina, kun  $|\mathbf{x}| \geq M$  ja  $\mathbf{x} \in D$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $D = \mathbb{R}^2$  ja olkoon  $f(x, y) = \frac{x+y}{1+x^2+y^2}$ . Laske  $\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} f(x, y)$ .

Seuraavat laskusäännöt pätevät raja-arvoille. Lukijan pitäisi pystyä ne itse todistamaan.

*Raja-arvon laskusääntöjä*

Oletetaan, että  $F$  ja  $G$  ovat kuvauksia  $D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja että raja-arvot  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x})$  ja  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} G(\mathbf{x})$  ovat olemassa. Tällöin raja-arvolle pätevät seuraavat laskusäännöt.

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (F(\mathbf{x}) \pm G(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) \pm \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} G(\mathbf{x}).$$

$$(2) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (F(\mathbf{x}) \cdot G(\mathbf{x})) = \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) \right) \cdot \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} G(\mathbf{x}) \right).$$

Jos  $f, g, h : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja raja-arvot  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})$ ,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})$  ja  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x})$  ovat olemassa, niin seuraavat väittämät ovat voimassa:

$$(3) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) \right) \left( \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \right).$$

$$(4) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x})}{\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x})}, \text{ jos } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) \neq 0.$$

$$(5) \text{ Jos } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} h(\mathbf{x}) = b \text{ ja } f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x}) \text{ jokaisella } \mathbf{x} \in D \cap B(\mathbf{a}, \delta) \text{ } (\delta > 0), \text{ niin silloin myös } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = b.$$

Formaalisti lukujono on funktio  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Tavallisesti kuitenkin merkitään  $f(n)$ :n sijaan  $a_n$ , ja koko lukujonoa  $(a_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ . Lukujonon raja-arvo on määritelty jo lukiossa, mutta miten se liittyy funktion raja-arvoon?

Joukolla  $\mathbb{N}$  ei ole kasautumispisteitä. Kuitenkin merkintä  $n \rightarrow \infty$  lienee kaikille tuttu. Jotta voisimme käyttää aiemmin määriteltyjä käsitteitä puhuttaessa lukujonoista on meidän tarkasteltava suurempaa joukkoa  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Tässä joukossa voimme määritellä luvun  $k$  etäisyyden äärettömyydestä (“ $|k - \infty|$ ”) luvuksi  $1/|k|$ . Tällöin pisteen  $\infty$  ympäristöt ovat kaikki joukot  $\mathbb{N} \setminus K$ , missä  $K \subset \mathbb{N}$  on äärellinen. Lisäksi  $\infty$  on joukon  $\mathbb{N}$  kasautumispiste. Kun puhutaan lukujonon raja-arvosta, niin sillä tarkoitetaan nimenomaan raja-arvoa tässä ainoassa kasautumispisteessä.

Samalla tavalla voimme tulkita pistejonoa  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$ , missä  $\mathbf{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(p)}) \in \mathbb{R}^p$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

Voimme ilmaista pistejonon suppenemisen seuraavalla tutumman näköisellä tavalla. Pistejonon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  sanotaan suppenevan eli konvergoivan kohti pistettä  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ , jos jostaista positiivista lukua  $\varepsilon$  kohti on olemassa sellainen  $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ , että

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } k \geq n_0$$

eli  $\mathbf{a}_k \in B(\mathbf{a}, \varepsilon)$ , kun  $k \geq n_0$ . Tällöin merkitään  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$  tai  $\mathbf{a}_k \rightarrow \mathbf{a}$ , kun  $k \rightarrow \infty$ , ja alkioita  $\mathbf{a}$  kutsutaan jonon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  raja-arvoksi (raja-alkioksi).

*Esimerkki.* Asetetaan jokaista lukua  $k \in \mathbb{Z}_+$  vastaamaan avaruuden  $\mathbb{R}^3$  piste  $\mathbf{a}_k = (1, \frac{k}{k+1}, \frac{1}{k})$ . Koska

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0,$$

niin ilmeisesti  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = (1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Todistetaan tämä luennolla.

Jonon raja-arvolla voimme myös tarkastella kasautumispisteitä:  $\mathbf{a}$  on joukon  $D$  kasautumispiste tarkalleen silloin, kun on olemassa sellainen pistejono  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty} \subset D \setminus \{\mathbf{a}\}$ , jolle  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$ .

**Lause 1.13.** *Olkkoon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^p$  pistejono, jolle  $\mathbf{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(p)})$  jokaisella  $k \in \mathbb{N}$ , ja olkkoon  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ . Tällöin  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$  tarkalleen silloin, kun  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k^{(i)} = a_i$  jokaisella  $i = 1, 2, \dots, p$ .*

TODISTUS. Väite seuraa välittömästi alla olevasta yhtäpitävyydestä.

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}_k - \mathbf{a}|^2 &= (a_k^{(1)} - a_1)^2 + \dots + (a_k^{(p)} - a_p)^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \\ \Leftrightarrow (a_k^{(i)} - a_i)^2 &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{jokaisella } i = 1, 2, 3, \dots, p. \end{aligned} \quad \square$$

**Lause 1.14.** *Olkkoot  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $\mathbf{a}$  jokin joukon  $D$  kasautumispiste. Tällöin seuraavat väittämät ovat yhtäpitäviä:*

- $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} F(\mathbf{a}_k) = \mathbf{b}$  jokaiselle pistejonolle  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty} \subset D \setminus \{\mathbf{a}\}$ , jolle  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$ .

TODISTUS. Selvästi väittämästä a) seuraa väittämä b), joten riittää osoittaa, että väittämästä b) seuraa väittämä a).

Oletetaan siis, että väittämä b) on tosi. Tehdään vastaoletus: väittämä a) ei ole tosi. Tällöin on olemassa sellainen  $\varepsilon > 0$ , että pisteen  $\mathbf{a}$  jokaisesta ympäristöstä  $B(\mathbf{a}, \frac{1}{k})$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , löytyy sellainen piste  $\mathbf{x}_k$ , että  $\mathbf{x}_k \in D$  ja  $|F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{b}| \geq \varepsilon$ . On siis saatu sellainen jono  $(\mathbf{x}_k)_{k=1}^{\infty} \subset D$ , että  $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}$  ja  $|F(\mathbf{x}_k) - \mathbf{b}| \geq \varepsilon$  jokaisella  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten vastaoletus on väärä ja väite tosi.  $\square$

*Esimerkki.* Olkkoon  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ . Määritellään kuvaus  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ . Laske  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ .

Kurssissa Analyysi 1 reaalilukujonoa  $(a_k)_{k=1}^{\infty}$  kutsuttiin *Cauchyn jonoksi*, kun se toteutti seuraavan ehdon: jokaista positiivista lukua  $\varepsilon$  kohti on olemassa sellainen luku  $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{N}$ , että  $|a_k - a_m| < \varepsilon$  aina, kun  $k, m \geq n_0$ . Analyysi 1:n kurssilla todistettiin, että reaalilukujen joukko on siinä mielessä täydellinen, että sen jokainen Cauchyn jono suppenee. Analoginen tulos pätee myös avaruuden  $\mathbb{R}^p$  ( $p < \infty$ ) pistejonoille.

**Lause 1.15.** *Olkkoon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^p$  pistejono. Tällöin välttämätön ja riittävä ehto jonon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  suppenemiselle on se, että  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  on Cauchyn jono.*

TODISTUS. Jos jono  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  suppenee kohti pistettä  $\mathbf{a}$ , niin jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $n_0(\varepsilon) = n_0 \in \mathbb{Z}_+$ , että

$$|\mathbf{a} - \mathbf{a}_k| < \varepsilon/2,$$

kun  $k \geq n_0$ . Tällöin

$$|\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_m| \leq |\mathbf{a}_m - \mathbf{a}| + |\mathbf{a} - \mathbf{a}_k| < \varepsilon,$$

kun  $k, m \geq n_0$ . Siis  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  on Cauchyn jono.

Osoitetaan käänteinen väite. Olkoon siis  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  Cauchyn jono, missä  $\mathbf{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(p)})$ . Tällöin jonon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^{\infty}$  mikä tahansa koordinaattijono  $(a_k^{(i)})_{k=1}^{\infty}$  on Cauchy-jono  $\mathbb{R}$ :ssä, joten jono  $(a_k^{(i)})_{k=1}^{\infty}$  suppenee. Koska tämä pätee kaikille koordinaattijonoille, niin väite seuraa Lauseesta 1.13.  $\square$

## LUKU 2

### Derivaatta ja sen ominaisuudet

Kurssissa matematiikan perusmenetelmät 1 tarkasteltiin funktioita  $f : D^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , missä joukko  $D \subset \mathbb{R}$  oli esimerkiksi avoin väli. Jos luku  $a$  kuului välille  $D$  ja raja-arvo

$$L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

oli olemassa äärellisenä, niin funktion  $f$  sanottiin olevan differentioituva pisteessä  $a$  ja luku  $L$  sanottiin  $f$ :n derivaataksi pisteessä  $a$  sekä merkittiin  $L = f'(a)$ .

Tämän luvun tarkoituksena on yleistää differentiaalilaskennan käsitteet funktioille  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .

#### 1. Kuvauksen jatkuvuus ja derivaatan määritelmä

**Määritelmä 2.1.** Oletetaan, että  $\mathbf{a}$  on joukon  $D$  kasautumispiste. Kuvaus  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on *jatkuva pisteessä*  $\mathbf{a} \in D$ , jos  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{a})$ . Toisin sanoen jokaista positiivilukua  $\varepsilon$  kohti on olemassa positiiviluku  $\delta$  niin, että ehdoista  $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$  ja  $\mathbf{x} \in D$  seuraa epäyhtälö  $|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{a})| < \varepsilon$ . Jos  $F$  on jatkuva joukon  $D$  jokaisessa pisteessä, niin sanotaan, että  $F$  on jatkuva joukossa  $D$ .

*Esimerkki.* Tutki funktion

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jatkuvuutta origossa.

*Esimerkki.* Olkoot  $F : D^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^n \supset E \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $F(D^m) \subset E$ . Jos kuvaus  $G$  on jatkuva,  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$  ja  $\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{b}} G(\mathbf{y}) = \mathbf{c}$ , niin  $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} (G \circ F)(\mathbf{x}) = \mathbf{c}$ .

Lauseen 1.14 nojalla  $F$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a} \in D$ , jos ja vain jos  $F(\mathbf{a}_k) \rightarrow F(\mathbf{a})$  jokaiselle pistejonolle  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^\infty \subset D$ , joka toteuttaa ehdon  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{a}_k = \mathbf{a}$ .

**Lause 2.2.** *Funktio*  $F = (f_1, f_2, \dots, f_p) : D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on *jatkuva pisteessä*  $\mathbf{a} \in D$ , jos ja vain jos kuvauksen  $F$  kaikki koordinaattifunktiot  $f_i : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) ovat jatkuvia pisteessä  $\mathbf{a} \in D^n$ .

TODISTUS. Lauseen 1.11 nojalla väite seuraa välittömästi. □

Kurssissa matematiikan perusmenetelmät 1 yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen funktion  $f$  differentioituvuus pisteessä  $a \in \mathbb{R}$  määriteltiin seuraavasti: on olemassa luku  $b \in \mathbb{R}$  ja funktio  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  niin, että

$$f(a + h) - f(a) = bh + h\rho(h) \quad \text{ja} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0.$$

Lisäksi todettiin, että  $f$ :n derivoituvuus ja differentioituvuus pisteessä  $b$  ovat yhtäpitäviä. Yleistetään differentioituvuuden käsite usean reaalimuuttujan reaaliarvoisille funktioille.

Jos yritämme suoraan yleistää edellisen määritelmän korkeampaan ulottuvuuteen joudumme vaikeuksiin kun yritämme kertoa vektorit  $\mathbf{b}$  ja  $\mathbf{h}$ . Voimme kuitenkin tulkita yksiulotteisen tapauksen hieman sofistikoitummin. Voimme nimittäin ajatella tuloa  $bh$  lineaarikuvauksena  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $B(h) = bh$ . Nyt voimme ilmaista derivaatan pisteessä  $a$  myös näin: se on lineaarikuvaus  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  joka approksimoi kuvausta  $f$  mahdollisimman hyvin, t.s. jolle erotus

$$f(a+h) - f(a) - B(h)$$

on mahdollisimman pieni, eli suuruusluokkaa  $o(h)$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Tämä määritelmä on suoraan käytettävissä myös korkeammassa ulottuvuudessa.

**Määritelmä 2.3.** Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko,  $\mathbf{a} \in D$  ja  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Kuvaus  $f$  on *differentioituva* pisteessä  $\mathbf{a}$ , jos on olemassa lineaarikuvaus  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja funktio  $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  joille

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = B(\mathbf{h}) + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}),$$

missä  $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ . Edellä  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ . Jos  $F$  on differentioituva määrittelyalueensa  $D$  jokaisessa pisteessä, sanotaan että  $F$  on differentioituva.

Koska  $D$  on avoin ja  $\mathbf{a} \in D$ , niin  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D$  luvun  $|\mathbf{h}|$  ollessa riittävän pieni. Ylläoleva määritelmä ei edellytä funktion  $\rho$  olevan määritelty origossa. Voidaan kuitenkin asettaa  $\rho(\mathbf{0}) = 0$ , jolloin  $\rho$  tulee jatkuvaksi origossa.

Seuraavassa luvussa tutkimme, miten derivaatan voi laskea silloin kun se on olemassa. Ennen sitä kuitenkin tuttu lause tässä yleisemässä tapauksessa.

**Lause 2.4.** Jos  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{a} \in D$ , niin  $F$  on jatkuva pisteessä  $\mathbf{a}$ .

TODISTUS. Olkoon  $B$  kuvauksen  $F$  derivaatta pisteessä  $\mathbf{a}$ . Lineaarikuvaus  $B$  voidaan ajatella matriisina. Olkoon  $b$  tämän matriisin (itseisarvoltaan) suurin alkio. Tällöin  $|B(\mathbf{h})| \leq b|\mathbf{h}|$  ja näin ollen saamme

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a})| &= |B(\mathbf{h}) + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h})| \\ &\leq b|\mathbf{h}| + |\mathbf{h}||\rho(\mathbf{h})| \\ &= |\mathbf{h}|(b + |\rho(\mathbf{h})|) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

luvun  $|\mathbf{h}|$  lähestyessä 0:aa. □

**Lause 2.5.** Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko. Kuvaus  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x} \in D$  jos ja vain jos on olemassa lineaarikuvaus  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  siten, että

$$|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})| = o(|\mathbf{h}|)$$

TODISTUS. Oletetaan, että  $F$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$ . Silloin

$$|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})| = |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}) = o(|\mathbf{h}|)$$

funktion  $\rho$  määritelmän mukaan.

Jos päinvastoin oletamme, että

$$|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})| = o(|\mathbf{h}|),$$

niin voimme määritellä

$$\rho(\mathbf{h}) := \frac{F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|}.$$

Oletuksen mukaan  $|\rho(\mathbf{h})| = o(1)$ , joten  $\rho$  on differentioituvuuden määritelmässä vaadittu funktio, ja näin  $F$  on differentioituva. □

Kuten aiemmin on esitetty, voidaan vektoriarvoinen kuvaus  $F: D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  esittää koordinaattifunktioiden  $f_1, \dots, f_p: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  avulla. Näillä voimme myös palauttaa useat kuvauksen tuloksista vastaaviin funktioiden tuloksiin kuten seuraava tulos antaa ymmärtää.

**Lause 2.6.** *Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko. Kuvaus  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^p$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x} \in D$  jos ja vain jos jokainen koordinaattifunktio  $f_1, \dots, f_p: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$ .*

TODISTUS. Oletetaan ensin, että  $F$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$ . Olkoon  $i \in [1, n]$  ja olkoon  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$   $F$ :n derivaatta pisteessä  $\mathbf{x}$ . Merkitään symbolilla  $b_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  kuvauksen  $B$  koordinaattifunktiota. Huomaa, että myös  $b_i$  on lineaarikuvaus. Avaruudessa  $\mathbb{R}^p$  pätee  $|x_i - y_i| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  kun  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ . Tästä saadaan

$$|f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{a}) - b_i(\mathbf{h})| \leq |F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})| = o(|\mathbf{h}|)$$

Lauseen 2.5 mukaan.

Oletetaan nyt, että jokainen  $f_i$  on differentioituva ja merkitään  $f_i$ :n derivaattaa pisteessä  $\mathbf{x}$  symbolilla  $b_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Asetetaan  $B = (b_1, \dots, b_p)$ , jolloin  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on lineaarikuvaus. Käyttämällä taas Lausetta 2.5 saadaan

$$|F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) - B(\mathbf{h})|^2 = \sum_{i=1}^p |f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f_i(\mathbf{a}) - b_i(\mathbf{h})|^2 = \sum_{i=1}^p o(|\mathbf{h}|^2) = o(|\mathbf{h}|^2).$$

Väite seuraa ottamalla tästä puolittain neliöjuuren. □

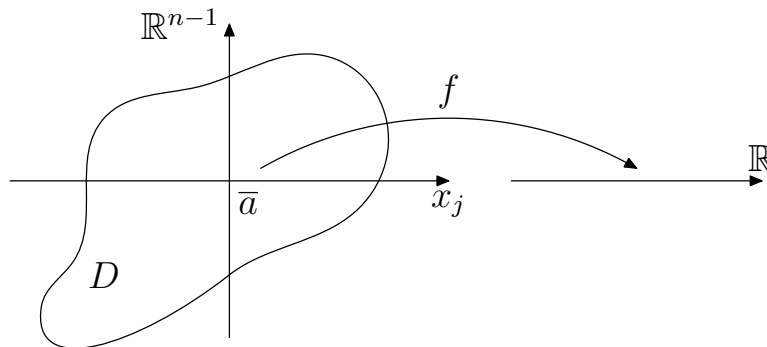
## 2. Osittaisderivaatat

Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $D$  on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  avoin osajoukko. Nyt jokainen joukon  $D$  piste on  $D$ :n sisäpiste.

Olkoon  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in D$ . Tarkastellaan yhden muuttujan funktiota

$$x_j \mapsto f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

eli tarkastellaan funktiota  $f$  pitkin  $x_j$ -akselin suuntaista suoraa, joka kulkee pisteen  $\mathbf{a}$  kautta. Tilannetta voidaan havainnollistaa seuraavalla kuvalla:



Kroneckerin delta -funktio määritellään kaavalla

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kun } i = j \\ 0, & \text{kun } i \neq j \end{cases}.$$

Merkitään

$$\mathbf{e}_j = (\delta_{1j}, \delta_{2j}, \dots, \delta_{nj}) = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j:s}, 0, \dots, 0),$$

jolloin joukko  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kanta ja

$$\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j = (a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n).$$

**Määritelmä 2.7.** Olkoot  $\mathbf{a} \in D^n$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ja  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Jos raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{h}$$

on olemassa äärellisenä, niin sanotaan, että  $f$  on *osittaindifferentioituva*  $j$ :nnen muuttujan  $x_j$  suhteen pisteessä  $\mathbf{a}$ . Tätä raja-arvoa kutsutaan  $f$ :n *osittaisderivaataksi*  $j$ :nnen muuttujan  $x_j$  suhteen (partial derivative) pisteessä  $\mathbf{a}$  ja merkitään symboleilla

$$\partial_j f(\mathbf{a}) \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}).$$

Jos osittaisderivaatta  $\partial_j f(\mathbf{a})$  on olemassa jokaisessa pisteessä  $\mathbf{a} \in D$ , niin kuvauksen  $f$  sanotaan olevan osittaindifferentioituva  $j$ :nnen muuttujan suhteen joukossa  $D$ .

Osittaisderivaattaa voidaan merkitä eräillä muillakin tavoilla. Esimerkiksi

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{a}), \quad D_{x_j} f(\mathbf{a}), \quad D_j f(\mathbf{a}), \quad f'_{x_j}(\mathbf{a}) \quad \text{ja} \quad f'_j(\mathbf{a})$$

ovat eräitä tapoja merkitä funktion  $f$  osittaisderivaattaa  $j$ :nnen muuttujan suhteen pisteessä  $\mathbf{a}$ . Tässä kurssissa pyritään käyttämään määritelmässä 2.7 annettuja merkintätapoja.

Jos  $f$  on osittaindifferentioituva kunkin muuttujan  $x_j$  suhteen, saadaan uusia funktioita

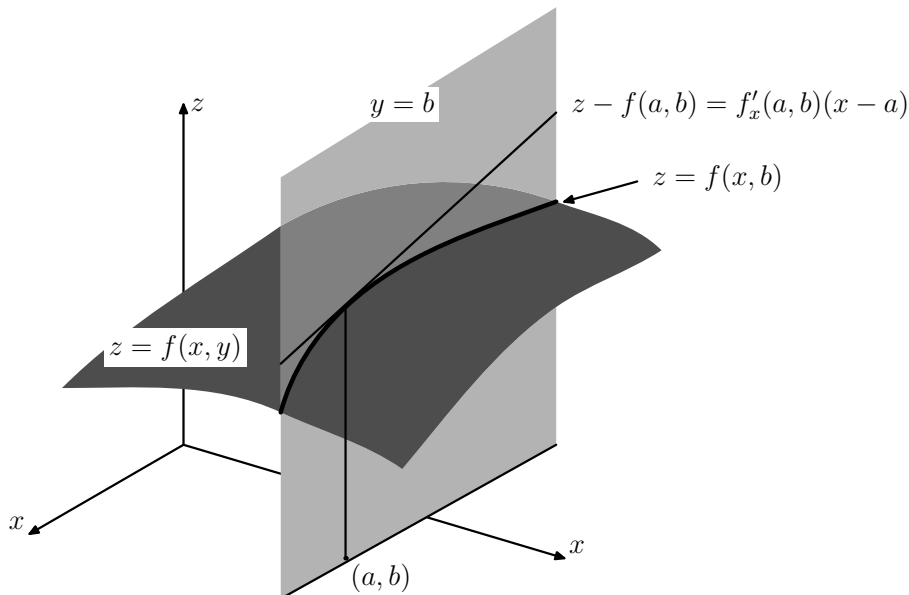
$$D \ni \mathbf{x} \mapsto \partial_j f(\mathbf{x}) \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Tarkastellaan tapausta  $n = 2$ , jolloin funktiota  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  voidaan havainnollistaa kuvaajan avulla muodossa  $z = f(x, y)$ , missä  $(x, y) \in D^2$ . Olkoon  $(a, b) \in D^2$ . Siis

$$\partial_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

ja vastaavasti

$$\partial_2 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$



*Esimerkki.* Olkoon  $f(x, y) = xy^3$ . Laske funktion  $f$  osittaisderivaatat pisteessä  $(1, 1)$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3 \sin(x_2x_3)$ . Laske funktion  $f$  osittaisderivaatat  $\partial_1 f(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\partial_2 f(x_1, x_2, x_3)$  ja  $\partial_3 f(x_1, x_2, x_3)$ .

*Esimerkki.*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Laske funktion  $f$  osittaisderivaatat origossa.

Differentioituvuus pisteessä implikoi osittaisderivaattojen olemassaolon:

**Lause 2.8.** Jos  $f$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{a}$ , niin  $f$  on osittaindifferentioituva jokaisen muuttujansa suhteen pisteessä  $\mathbf{a}$  ja  $A_j = \partial_j f(\mathbf{a})$  jokaisella  $j = 1, 2, \dots, n$ .

TODISTUS. Nyt

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \dots + A_n h_n + |\mathbf{h}| \rho(\mathbf{h}),$$

missä  $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ . Valitsemalla  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_j$  saadaan yhtälö

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a}) = tA_j + |t| \rho(t\mathbf{e}_j),$$

missä  $\rho(t\mathbf{e}_j) \rightarrow 0$ , kun  $|t| \rightarrow 0$ . Jos  $t \neq 0$ , niin edellinen yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = A_j + \frac{|t|}{t} \rho(t\mathbf{e}_j).$$

Kun  $t$ :n annetaan lähestyä nollaa, saadaan yhtälö

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{a})}{t} = A_j. \quad \square$$

Kuvauksen  $F: D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  koordinaattifunktioiden osittaisderivaattojen olemassaolo ei sen sijaan ole riittävää  $F$ :n differentioituvuudelle. Ehkä helpoin esimerkki tämänlaisesta tilanteesta on seuraava.

*Esimerkkejä.*

- (1) Olkoon funktio  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty kaavalla

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tällöin  $\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$ . Kuitenkaan  $f$  ei ole differentioituva origossa, sillä esimerkin 1 mukaan  $f$  ei ole edes jatkuva origossa

- (2) Olkoon  $F(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2)$ . Muodosta  $F$ :n Jacobin matriisi.  
 (3) Olkoon  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, x_1 + x_2 + x_3)$ . Muodosta funktion  $F$  Jacobin matriisi.

Vaikka osittaisderivaattojen olemassaolo ei takaa funktion differentioituvuutta, voidaan sillä kuitenkin kätevästi laskea derivaatta silloin kun se on olemassa.

Lineaarikuvaus voidaan tunnetusti esittää matriisin avulla. Jos  $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  on kuvauksen  $F: D^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  derivaatta pisteessä  $\mathbf{x} \in D^n$ , niin  $B$ :n matriisiesitystä avaruuksien  $\mathbb{R}^n$  ja  $\mathbb{R}^p$  luonnollisten kantojen suhteen kutsutaan kuvauksen  $F$  Jacobin matriisiksi pisteessä  $\mathbf{x}$ . Jacobin matriisiä merkitään usein

$$\mathcal{J}_{F, \mathbf{a}} \quad \text{tai} \quad \mathcal{J}_F(\mathbf{a}).$$

Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentioituva pisteessä  $\mathbf{a} \in D^n$ .  $F$ :n Jacobin matriisin determinanttia sanotaan  $F$ :n *Jacobin determinantiksi* (Jacobian) pisteessä  $\mathbf{a}$  ja merkitään

$$\det \mathcal{J}_{F,\mathbf{a}} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}(\mathbf{a}).$$

Koska determinantti on määritelty vain neliömatriiseille, niin Jacobin determinantti voidaan laskea vain kuvauksille  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Lause 2.9.** *Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin joukko. Jos kuvaus  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^p$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x} \in D$  niin sen Jacobin matriisi on  $i \times p$  matriisi pisteessä  $\mathbf{x}$  on*

$$B = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right]_{i=1, \dots, p, j=1, \dots, n}.$$

TODISTUS. Merkitään  $F$ :n Jacobin matriisiä pisteessä  $\mathbf{x}$  symbolilla  $\tilde{B}$ . Merkitään matriisin  $B$  rivejä  $B_i$ :llä,  $i = 1, \dots, p$ , samoin matriisille  $\tilde{B}$ . Määritellään  $\mathbf{h}_j = h e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Lasketaan koordinaateittain

$$|f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}_j) - f_i(\mathbf{x}) - \tilde{B}_i \mathbf{h}_j| \leq |F(\mathbf{x} + \mathbf{h}_j) - F(\mathbf{x}) - \tilde{B} \mathbf{h}_j| = o(h).$$

Toisaalta osittaisderivaatan määritelmän mukaan on

$$|f_i(\mathbf{x} + \mathbf{h}_j) - f_i(\mathbf{x}) - B_i \mathbf{h}_j| = o(h).$$

Näistä päätellään, että  $\tilde{B}_i \mathbf{h}_j = B_i \mathbf{h}_j$ , t.s. matriisien alkioit  $(i, j)$  ovat samat. Näin ollen matriisit ovat samat.  $\square$

### 3. $C^1$ -funktiot

**Määritelmä 2.10.** Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin osajoukko ja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Jos  $f$  on osittainderivoituva kunkin muuttujansa suhteen ja jos nämä osittaisderivaatat  $\partial_j f$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ovat jatkuvia funktioita, niin funktiota  $f$  kutsutaan  $C^1$ -funktioiksi määrittelyalueessa  $D$  tai lyhyesti  $C^1(D)$ -funktioiksi ja merkitään  $f \in C^1(D)$ .

**Lause 2.11.** *Jos  $f \in C^1(D)$ , niin  $f$  on differentioituva.*

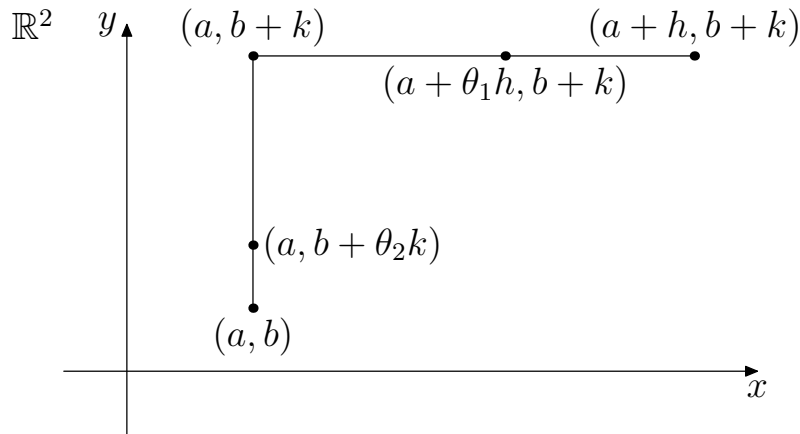
TODISTUS. Todistetaan lause havainnollisuuden vuoksi vain tapauksessa  $n = 2$  (yleinen tapaus on analoginen). Olkoot siis  $D \subset \mathbb{R}^2$  avoin,  $f \in C^1(D)$  ja  $(a, b) \in D$  mielivaltaisen. Valitaan luvut  $|h|$  ja  $|k|$  niin pieniksi, että  $B((a, b), |h| + |k|) \subset D$  (mahdollista!). Nyt

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = (f(a + h, b + k) - f(a, b + k)) + (f(a, b + k) - f(a, b)).$$

Merkitään  $\varphi(t) = f(a + t, b + k)$ , kun  $t \in [-|h|, |h|]$ , jolloin  $\varphi : [-|h|, |h|] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = \varphi(h) - \varphi(0) + (f(a, b + k) - f(a, b)).$$

Selvennetään seuraavaa tarkastelua hieman alla olevalla kuvalla.



Oletuksen mukaan  $f$ :n 1. osittaisderivaatta 1. muuttujan suhteen on jatkuva joukossa  $D$  ja  $(a + th, b + k) \in D$  jokaisella  $t \in [0, 1]$ , joten  $\varphi$  on jatkuvasti derivoituva välillä  $[0, h]$  ( $[h, 0]$ , jos  $h < 0$ ). Siten funktioon  $\varphi$  voidaan soveltaa väliarvolausetta välillä  $[0, h]$  ( $[h, 0]$ , jos  $h < 0$ ). Siis

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \varphi'(\theta_1 h)h,$$

missä  $0 < \theta_1 < 1$ , eli

$$\varphi(h) - \varphi(0) = \partial_1 f(a + \theta_1 h, b + k)h.$$

Koska  $\partial_1 f$  on oletuksen nojalla jatkuva, voidaan kirjoittaa

$$\partial_1 f(a + \theta_1 h, b + k) = \partial_1 f(a, b) + \rho_1(h, k),$$

missä  $\rho_1(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Vastaavalla tavalla nähdään, että

$$f(a, b + k) - f(a, b) = \partial_2 f(a, b + \theta_2 k)k = \partial_2 f(a, b)k + \rho_2(h, k)k,$$

missä  $0 < \theta_2 < 1$  ja  $\rho_2(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Kokoamalla tulokset saadaan

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) - f(a, b) &= \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k + h\rho_1(h, k) + k\rho_2(h, k) \\ &= \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k + \sqrt{h^2 + k^2} \left( \frac{h\rho_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{k\rho_2(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right). \end{aligned}$$

Nyt kuvaus

$$\rho(h, k) := \frac{h\rho_1(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{k\rho_2(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

toteuttaa vaatimuksen  $\rho(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , sillä

$$\begin{aligned} |\rho(h, k)| &\leq \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} |\rho_1(h, k)| + \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} |\rho_2(h, k)| \\ &= |\rho_1(h, k)| + |\rho_2(h, k)| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . □

*Esimerkki.* Oletetaan, että  $f(x, y, z) = xyz + \ln(xy^2z^3)$ .  $f$  on määritelty joukossa  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$ . Nyt  $f \in C^1(D)$ , sillä

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y, z) &= yz + \frac{y^2 z^3}{xy^2 z^3} = yz + \frac{1}{x}, \\ \partial_2 f(x, y, z) &= xz + \frac{2xz^3 y}{xy^2 z^3} = xz + \frac{2}{y} \end{aligned}$$

ja

$$\partial_3 f(x, y, z) = xy + \frac{3xy^2z^3}{xy^2z^3} = xy + \frac{3}{z}$$

ovat jatkuvia joukossa  $D$ .

#### 4. Ketjusääntö

Tässä kappaleessa johdetaan ketjusäännön yleistys useampiulotteisille funktioille, siis säännölle joka sanoo, että  $(g \circ f)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ , kun  $f, g: C^1(\mathbb{R})$ .

Tarkastellaan siis kahta funktiota,  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $G: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $n, m, p \geq 1$ . Heti huomataan, että  $G \circ F$  on hyvin määritelty funktio. Miten sen derivaatta lausutaan funktioiden  $F$  ja  $G$  avulla?

Olemme aiemmin todenneet, että funktion  $F$  derivaatta annetussa pisteessä on lineaarikuvaus  $DF$ , eli matriisi, joka kuvaa avaruuden  $\mathbb{R}^n$  avaruudelle  $\mathbb{R}^m$ . Vastaavasti, funktion  $g$  derivaatta on matriisi  $Dg$ , joka kuvaa avaruuden  $\mathbb{R}^m$  avaruudelle  $\mathbb{R}^p$ . Voimme siis yhdistää nämä lineaarikuvaukset; huomaa, että tämä on sama kuin että kertoisimme vastaavat matriisit keskenään.

Ottaen huomioon yksiulotteisen ketjusäännön, voimme nyt arvata, että oikea kaava on  $D(g \circ F)(\mathbf{x}) = DF(g(\mathbf{x}))Dg(\mathbf{x})$ , missä oikealla on matriisien tulo.

Tämän tuloksen todistuksessa käytämme seuraavaa merkintää:  $\|A\| = \max a_{ij}$ , kun  $A = (a_{ij})$  on matriisi. Tätä kutsutaan matriisin normiksi.

**Lause 2.12.** *Olkoon  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ja  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $n, m, p \geq 1$ , differentioituvia funktioita. Tällöin  $h = g \circ F$  on myös differentioituva, ja  $Dh(\mathbf{x}) = Df(g(\mathbf{x}))Dg(\mathbf{x})$  jokaiselle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .*

**TODISTUS.** Kiinnitetään piste  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Määritellään matriisit  $A = Dg(\mathbf{x})$  ja  $B = Df(g(\mathbf{x}))$ . Lauseen väite on, että  $Dh(\mathbf{x}) = BA$ . Määritelmän mukaan meidän pitää siis tutkia, kuinka nopeasti

$$h(\mathbf{x} + \Delta) - h(\mathbf{x}) - BA\Delta = F(g(\mathbf{x} + \Delta)) - F(g(\mathbf{x})) - BA\Delta$$

pienenee kun  $\Delta \rightarrow 0$ .

Kirjoitetaan e.m. erotus muotoon, jossa voimme hyödyntää tietojamme  $F$ :n ja  $g$ :n derivaatoista:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x} + \Delta) - h(\mathbf{x}) - BA\Delta &= [F(g(\mathbf{x} + \Delta)) - F(g(\mathbf{x})) - B(F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x}))] \\ &\quad + [B(F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})) - BA\Delta]. \end{aligned}$$

Ensimmäiselle hakasulkutemille saamme:

$$F(g(\mathbf{x} + \Delta)) - F(g(\mathbf{x})) - B(F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})) = o(|F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})|),$$

koska  $B$  on funktion  $g$  derivaatta. Toiselle hakasulkutemille saamme:

$B(F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})) - BA\Delta = B(F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})) - A\Delta \leq \|B\| |F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x}) - A\Delta|$ , missä olemme käyttäneet  $B$ :n lineaarisuutta. Oikealla puolella esiintyvät itseisarvot on määritelmän mukaan suuruusluokkaa  $o(|\Delta|)$ , koska  $A$  on funktion  $F$  derivaatta.

Näin ollen olemme todistaneet, että

$$h(\mathbf{x} + \Delta) - h(\mathbf{x}) - BA\Delta = o(|F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})|) + \|B\|o(|\Delta|).$$

Koska  $B$  ei riipu  $\Delta$ :sta, voimme sanoa, että  $\|B\|o(|\Delta|) = o(|\Delta|)$ . Toisaalta, koska  $F$  on derivoituva, tiedämme, että  $|F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})| \leq 2A\Delta \leq 2\|A\| |\Delta|$  kun  $\Delta$  on tarpeeksi pieni. Tästä seuraa, että  $|F(\mathbf{x} + \Delta) - F(\mathbf{x})| = o(|\Delta|)$ . Näin ollen  $h(\mathbf{x} + \Delta) - h(\mathbf{x}) -$

$BA\delta = o(|\Delta|)$ , joten  $h$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{x}$  ja sen derivaatta on  $BA$ . Koska  $\mathbf{x}$  oli mielivaltainen piste, niin väite on todistettu.  $\square$

Ketjusääntö on helppo muistaa “differentiaalien kumoutumisena”. Tämän ymmärtää helpoiten esimerkin avulla: olkoon  $g(u, v, w) = u + 2v + 3w$  ja  $(u, v, w) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2, xy)$ . Huomaa, että toiselle funktiolle ei ole tässä edes annettu nimeä. Ketjusäänöllä saamme

$$\frac{\partial g}{\partial(x, y)} = \frac{\partial g}{\partial(u, v, w)} \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y)} = [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \\ y & x \end{bmatrix} = [6x + 3y \quad -2y + 3x].$$

Toisaalta,  $g(x, y) = (x^2 + y^2) + 2(x^2 - y^2) + 3(xy) = 3x^2 + 3xy - y^2$ . Suoraan laskemassa tästä saamme  $Dg(x, y) = [6x + 3y \quad 3x - 2y]$ .

*Esimerkki.* Laske  $\frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1 x_2^2)$  ja  $\frac{\partial}{\partial x_2} \sin(x_1 x_2^2)$ .

*Esimerkki.* Laske  $\frac{\partial}{\partial x} \sin(\ln(x^2 + y^2))$  ja  $\frac{\partial}{\partial y} \sin(\ln(x^2 + y^2))$ .

*Esimerkki.* Olkoot  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$   $C^1$ -funktio ja  $G(t) = (\cos t, \sin t)$ , missä  $t \in \mathbb{R}$ . Merkitään  $h(t) = f(G(t))$ . Laske  $h'(t)$ .

*Esimerkki.* Olkoon funktio  $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  määritelty kaavalla

$$G(s, t) = \left(\frac{1}{2}(s+t), \frac{1}{2}(s-t)\right) \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2$$

ja olkoon  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jokin  $C^1$ -funktio. Laske yhdistetyn funktion  $h = f \circ G$  osittaisderivaatat.

*Ratkaisu.*

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = \partial_1 h(s, t) = \partial_1 f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \partial_2 f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = \partial_2 h(s, t) = \partial_1 f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \partial_2 f\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Olkoon erityisesti  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Tällöin

$$\partial_1 f(x, y) = 2x, \quad \partial_2 f(x, y) = 2y$$

ja siten

$$\frac{\partial h}{\partial s}(s, t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{s+t}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{s-t}{2} = s$$

ja

$$\frac{\partial h}{\partial t}(s, t) = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{s+t}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{s-t}{2} = t$$

*Esimerkki.* Olkoon  $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Lausu lauseke  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$  napakoordinaateissa.

*Ratkaisu.* Jos  $(x, y) \neq (0, 0)$ , niin on voimassa seuraavat muunnoskaavat

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad r > 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

$x$  ja  $y$  voidaan siis tulkita  $r$ :n ja  $\varphi$ :n funktioiksi. Tarkastellaan kuvausta  $h(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = f(x, y)$ . Nyt

$$\frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) = \cos \varphi \partial_1 f(x, y) + \sin \varphi \partial_2 f(x, y)$$

ja

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) = (-r \sin \varphi) \partial_1 f(x, y) + r \cos \varphi \partial_2 f(x, y).$$

Koska

$$r \cos(\varphi) \frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) - \sin(\varphi) \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) = r \partial_1 f(x, y)$$

ja

$$r \sin(\varphi) \frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi) + \cos(\varphi) \frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi) = r \partial_2 f(x, y),$$

niin

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)^2 = \left(\frac{\partial h}{\partial r}(r, \varphi)\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial h}{\partial \varphi}(r, \varphi)\right)^2.$$

### 5. Korkeamman kertaluvun osittaisderivaatat

Olkoon  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Merkitään  $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Osittaindifferentioituvan funktion  $f$  osittaisderivaatat  $\partial_j f(\mathbf{x})$  ovat myös funktioita  $D^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Jos nämä ovat edelleen osittaindifferentioituvia, voidaan muodostaa uusia, *toisen kertaluvun osittaisderivaattoja*

$$\partial_k(\partial_j f(\mathbf{x})) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Näille toisen kertaluvun osittaisderivaatoille käytetään myös merkintöjä

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(\mathbf{x}), \quad f''_{x_j x_k}(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad f''_{j k}(\mathbf{x}).$$

Huomaa, että merkinnöissä  $f''_{x_j x_k}$  ja  $f''_{j k}$  alaindeksit ilmaisevat osittaisderivoinnin järjestyksen — ensin derivoidaan  $j$ :nnen muuttujan suhteen ja sitten  $k$ :nnen muuttujan suhteen. Jos erikoisesti  $k = j$ , niin käytetään merkintöjä

$$\partial_j \partial_j f(\mathbf{x}), \quad \partial_j^2 f(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(\mathbf{x}), \quad f''_{j j}(\mathbf{x}) \quad \text{ja} \quad f''_{x_j x_j}(\mathbf{x}).$$

Jatkamalla edellistä menettelyä saadaan (mahdollisesti) yhä korkeamman kertaluvun osittaisderivaattoja. Lisäksi edellisillä merkinnöillä on analogiset vastineet.

*Osittaisderivaatan kertaluvulla* tarkoitetaan tietysti osittaisderivointikertojen lukumäärää.

*Esimerkki.* Jos  $f(x, y) = xy + \ln(xy^2) = xy + \ln x + 2 \ln y$  ( $x, y > 0$ ), niin  $f$ :n ensimmäisen kertaluvun derivaatat ovat

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y + \frac{1}{x} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \frac{2}{y}.$$

Näin ollen  $f$ :n toinen osittaisderivaatta  $x$ :n suhteen ja  $f$ :n toinen osittaisderivaatta  $y$ :n suhteen on määritelty lausekkeilla

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2}{y^2}$$

sekä toisen kertaluvun ”*sekaderivaatat*” (mixed partials) lausekkeilla

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 1.$$

Esimerkissä 5 havaittiin, että sekaderivaatat ovat samat. Yleisessä tapauksessa sekaderivaatat eivät välttämättä ole samat. Kuitenkin meillä on seuraava lause. Otetaan käyttöön merkintä

$$C^k(D) = \{f : D^n \rightarrow \mathbb{R} \mid D^n = \text{Int } D^n, f : n \text{ kaikki osittaisderivaatat kertalukuun } k \text{ saakka ovat olemassa ja jatkuvia } D\text{:ssä}\}$$

**Lause 2.13.** *Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja  $f \in C^2(D)$ . Tällöin*

$$\partial_k(\partial_j f(\mathbf{x})) = \partial_j(\partial_k f(\mathbf{x}))$$

*kaikilla  $j, k = 1, 2, \dots, n$ .*

TODISTUS. Tarkastelemme tapausta  $n = 2$ . Siis  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ja lisäksi  $f \in C^2(D^2)$ . On osoitettava, että  $\partial_1(\partial_2 f(x, y)) = \partial_2(\partial_1 f(x, y))$ . Todistus perustuu reaalfunktion väliarvolauseeseen toistettuun käyttöön.

Olkoon  $(x, y) \in D^2$  ja luvut  $h$  ja  $k$  itseisarvoltaan niin pieniä, että  $B((x, y), |h| + |k|) \subset D^2$ . Tarkastellaan lauseketta

$$g(h, k) = f(x + h, y + k) - f(x, y + k) - f(x + h, y) + f(x, y).$$

Merkitään  $\varphi(t) = f(x + h, t) - f(x, t)$  jokaisella  $t \in [y - |k|, y + |k|]$  ja  $\psi(s) = f(s, y + k) - f(s, y)$  jokaisella  $s \in [x - |h|, x + |h|]$ . Tällöin

$$g(h, k) = \varphi(y + k) - \varphi(y) \quad \text{ja} \quad g(h, k) = \psi(x + h) - \psi(x).$$

Sovelletaan väliarvolauseetta funktioon  $\varphi$  välillä  $[y, y + k]$ , jos  $k > 0$ , ja välillä  $[y + k, y]$ , jos  $k < 0$  (sallittua!). Saadaan

$$\begin{aligned} g(h, k) &= \varphi(y + k) - \varphi(y) \\ &= \varphi'(y + \theta k)k \\ &= (\partial_2 f(x + h, y + \theta k) - \partial_2 f(x, y + \theta k))k, \end{aligned}$$

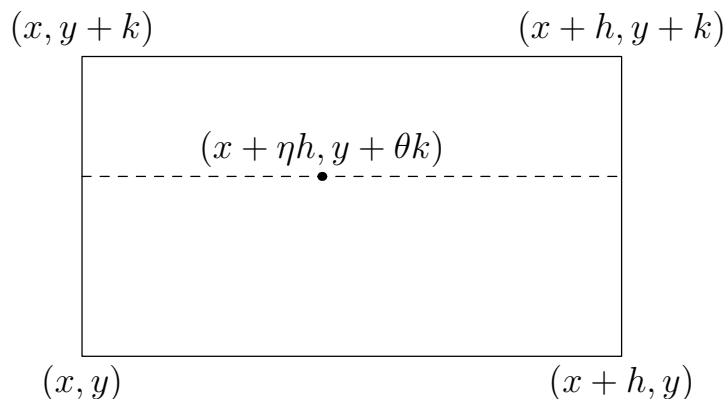
missä  $\theta \in ]0, 1[$ . Yllä oleva esitys voidaan tulkita funktion

$$(2.14) \quad s \mapsto \partial_2 f(s, y + \theta k)$$

arvojen erotukseksi välillä  $[x, x + h]$ , jos  $h > 0$ , ja välillä  $[x + h, x]$ , jos  $h < 0$ . Soveltamalla vastaavuuden (2.14) määrittelemään funktioon väliarvolauseetta (sallittua!) saadaan

$$g(h, k) = \partial_1(\partial_2 f(x + \eta h, y + \theta k))kh,$$

missä  $0 < \eta < 1$ .



Olkoon nyt  $hk \neq 0$ . Koska  $\partial_1 \partial_2 f$  on jatkuva, niin havaitaan, että

$$\frac{g(h, k)}{hk} = \partial_1(\partial_2 f(x + \eta h, y + \theta k)) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \partial_1 \partial_2 f(x, y).$$

Vastaava päättely funktiolle  $\psi$  antaa

$$\begin{aligned} g(h, k) &= \psi(x + h) - \psi(x) \\ &= (\partial_1 f(x + \eta h, y + k) - \partial_1 f(x + \eta h, y))h \\ &= \partial_2(\partial_1 f(x + \eta h, y + \theta h))hk, \end{aligned}$$

mistä funktion  $\partial_2 \partial_1 f$  jatkuvuuden nojalla saadaan (jos  $hk \neq 0$ )

$$\frac{g(h, k)}{hk} = \partial_2(\partial_1 f(x + \eta h, y + \theta k)) \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \partial_2 \partial_1 f(x, y).$$

Koska raja-arvo

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \frac{g(h, k)}{hk}$$

on yksikäsitteinen, väite seuraa. □

## 6. Taylorin kehitelmä ja Taylorin polynomi

Analyysi 1:n kurssilla tutustuttiin yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisen kuvauksen Taylorin kehitelmään. Kerrataan hieman. Jos  $f : D^1 \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f \in C^{n+1}(D^1)$ , niin on voimassa kehitelmä

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1},$$

missä

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\beta) h^{n+1}, \quad a \in D, \quad a + h \in D \quad \text{ja} \quad a < \beta < a + h.$$

Johdetaan nyt tämän tuloksen yleistys usean muuttujan reaaliarvoisille funktioille. Aluksi esitetään seuraava lause.

**Lause 2.15.** *Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^2$  avoin osajoukko,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2(D)$ -kuvaus ja  $(a, b) \in D$ . Tällöin kaikilla  $(h, k)$ , joille  $(a + h, b + k) \in D$ , pätee*

$$\begin{aligned} f(a + h, b + k) &= f(a, b) + \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k \\ &\quad + \frac{1}{2}(\partial_1^2 f(a, b)h^2 + 2\partial_1 \partial_2 f(a, b)hk + \partial_2^2 f(a, b)k^2) \\ &\quad + (h^2 + k^2)\eta(h, k), \end{aligned}$$

missä  $\eta(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

**TODISTUS.** Olkoon  $(a, b) \in D$ . Tarkastellaan funktiota  $g$ , joka määritellään kaavalla  $g(t) = f(a + th, b + tk)$ , missä  $t \in [0, 1]$ . Ilmeisesti  $g$  on kahdesti derivoituva, joten  $g$ :llä on kehitelmä

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{1}{2}g''(\theta)t^2,$$

missä  $t \in [0, 1]$ . Yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla  $g$ :n derivaatta toteuttaa yhtälön

$$\begin{aligned} g'(t) &= \text{grad } f(a + th, b + tk) \cdot (h, k) \\ &= \partial_1 f(a + th, b + tk)h + \partial_2 f(a + th, b + tk)k \end{aligned}$$

Erityisesti

$$g'(0) = \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k.$$

Yhdistetyn funktion derivoimissäännön nojalla saadaan edelleen  $g$ :n toinen derivaatta.

$$g''(t) = \partial_1^2 f(a+th, b+tk)h^2 + \partial_2 \partial_1 f(a+th, b+tk)kh \\ + \partial_1 \partial_2 f(a+th, b+tk)kh + \partial_2^2 f(a+th, b+tk)k^2.$$

Koska  $f \in C^2$ , on  $\partial_1^2 f$  jatkuva, joten  $\partial_1^2 f(a+th, b+tk) \rightarrow \partial_1^2 f(a, b)$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Näin ollen

$$\partial_1^2 f(a+th, b+tk) = \partial_1^2 f(a, b) + \eta_1(h, k),$$

missä  $\eta_1(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Vastaavalla tavalla päättelemällä saadaan

$$\partial_2^2 f(a+th, b+tk) = \partial_2^2 f(a, b) + \eta_3(h, k),$$

missä  $\eta_3(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , ja

$$\partial_1 \partial_2 f(a+th, b+tk) = \partial_1 \partial_2 f(a, b) + \eta_2(h, k),$$

missä  $\eta_2(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Kokoamalla edelliset tulokset saadaan

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k \\ + \frac{1}{2}(\partial_1^2 f(a, b)h^2 + 2\partial_1 \partial_2 f(a, b)hk + \partial_2^2 f(a, b)k^2) \\ + (h^2 + k^2) \underbrace{\left( \frac{\eta_1(h, k)h^2}{2(h^2 + k^2)} + \frac{\eta_2(h, k)hk}{h^2 + k^2} + \frac{\eta_3(h, k)h^2}{2(h^2 + k^2)} \right)}_{=\eta(h, k)}.$$

Ilmeisesti  $\eta(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ , sillä  $\eta_1(h, k) \rightarrow 0$ ,  $\eta_2(h, k) \rightarrow 0$  ja  $\eta_3(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .  $\square$

**Määritelmä 2.16.** Kehitelmää

$$T_2(f, (a, b)) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b)h + \partial_2 f(a, b)k \\ + \frac{1}{2}(\partial_1^2 f(a, b)h^2 + 2\partial_1 \partial_2 f(a, b)hk + \partial_2^2 f(a, b)k^2)$$

sanotaan  $f$ :n toisen asteen Taylorin polynomiksi (Taylor polynomial) pisteen  $(a, b)$  ympäristössä ja termi

$$R_3 = (h^2 + k^2)\eta(h, k)$$

on vastaava jäännöstermi (remainder term) Taylorin kehitelmässä (Taylor expansion)

$$f(a+h, b+k) = T_2(f, (a, b)) + R_3.$$

Jos  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on  $C^2(D^n)$ -funktio, niin saadaan vastaavasti kehitelmä

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(\mathbf{a})h_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n (\partial_j \partial_k f)(\mathbf{a})h_j h_k + |\mathbf{h}|^2 \eta(\mathbf{h}),$$

missä  $\mathbf{a} \in D^n$ ,  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D^n$ ,  $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$  ja  $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ .

*Huomautus 2.17.* Funktion  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  1. asteen Taylorin kehitelmä on

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(\mathbf{a})h_j + |\mathbf{h}|\eta(\mathbf{h}),$$

missä  $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ . Siis  $f$ :n ensimmäisen asteen Taylorin kehitelmä pisteessä  $\mathbf{a}$  on sama kuin  $f$ :n differentioituvuuden määritelmä pisteessä  $\mathbf{a}$ .

Olkoon  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Jos  $f$ :n kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat ovat olemassa pisteessä  $\mathbf{a}$ , niin voidaan muodostaa  $f$ :n *Hessin matriisi* (Hessian matrix)  $H_{f,\mathbf{a}}$  pisteessä  $\mathbf{a}$ :

$$H_{f,\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(\mathbf{a}) & \partial_1 \partial_2 f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_1 \partial_n f(\mathbf{a}) \\ \partial_2 \partial_1 f(\mathbf{a}) & \partial_2^2 f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_2 \partial_n f(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n \partial_1 f(\mathbf{a}) & \partial_n \partial_2 f(\mathbf{a}) & \dots & \partial_n^2 f(\mathbf{a}) \end{bmatrix}.$$

Jos  $f$  on  $C^2(D^n)$ -funktio, niin  $f$ :n Hessin matriisi on symmetrinen, sillä  $\partial_i \partial_k f = \partial_k \partial_i f$  kaikilla  $i, k = 1, 2, \dots, n$ . Merkitään  $A = H_{f,\mathbf{a}}$ . Jos merkitään lisäksi  $[\mathbf{h}]^T = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ , niin Taylorin kehitelmä voidaan kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}[\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}] + |\mathbf{h}|^2 \eta(\mathbf{h}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2} A \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}|^2 \eta(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

*Esimerkki.* Muodosta funktion  $f$ ,  $f(x, y) = e^{xy} + x^2 + 2xy^3 + 3y$ , toisen asteen Taylorin polynomi pisteessä  $(2, 0)$ .

*Ratkaisu.* Nyt  $f(2, 0) = 1 + 4 = 5$  ja

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= ye^{xy} + 2x + 2y^3, & \partial_2 f(x, y) &= xe^{xy} + 6xy^2 + 3, \\ \partial_1^2 f(x, y) &= y^2 e^{xy} + 2, & \partial_2^2 f(x, y) &= x^2 e^{xy} + 12xy, \end{aligned}$$

ja

$$\partial_1 \partial_2 f(x, y) = \partial_2 \partial_1 f(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} + 6y^2.$$

Näin ollen

$$T_2(h, k) = 5 + 4h + 5k + \frac{1}{2}(2h^2 + 2hk + 4k^2).$$

*Esimerkki.* Muodosta funktion  $f$ ,  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ , Taylorin kehitelmä origossa.

*Ratkaisu.* Nyt kehitelmä

$$\sin t = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{t^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

on voimassa jokaisella  $t \in \mathbb{R}$ , joten sijoittamalla  $t = x^2 + y^2$  saadaan

$$\begin{aligned} f(h, k) &= h^2 + k^2 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(h^2 + k^2)^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= h^2 + k^2 + (h^2 + k^2) \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \frac{(h^2 + k^2)^{2i}}{(2i+1)!} \\ &= h^2 + k^2 + (h^2 + k^2) \eta(h, k). \end{aligned}$$

Selvästi  $\eta(h, k) \rightarrow 0$ , kun  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

Vastaavalla tavalla kuin yhden muuttujan funktiolle määrättiin derivaattojen arvoja funktion potenssisarjaesityksen avulla, voidaan usean muuttujan funktion potenssisarjaesitystä käyttää funktion osittaisderivaattojen arvojen määrittämiseen. Esimerkiksi edellisen esimerkin nojalla voidaan päätellä, että

$$\partial_1^2 f(0, 0) = \partial_2^2 f(0, 0) = 2 \quad \text{ja} \quad \partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \partial_1 f(0, 0) = \partial_2 f(0, 0) = 0.$$

Jos Taylorin ensimmäisen asteen kehitelmässä merkitään yksikkövektoria  $\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}$  symbolilla  $\mathbf{v}$ , saadaan esitys

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + |\mathbf{h}|(\text{grad } f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}) + |\mathbf{h}| \eta(\mathbf{h}).$$

Operaattorimerkintää

$$\partial_{\mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} = v_1 \partial_1 + v_2 \partial_2 + \dots + v_n \partial_n \quad (\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n))$$

käyttäen on voimassa

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{v}}^2 f &= \partial_{\mathbf{v}}(\partial_{\mathbf{v}} f) = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \partial_i \partial_j f = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 f \\ \partial_{\mathbf{v}}^3 f &= \dots = \sum_{i,j,k=1}^n v_i v_j v_k \partial_i \partial_j \partial_k f = \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right)^3 f \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Huomaa, että  $h_i = |\mathbf{h}|v_i$ . Tätä merkintätapaa käyttäen voidaan *Taylorin n:nneen asteen kehitelmä* esittää muodossa

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{|\mathbf{h}|^i}{i!} \partial_{\mathbf{v}}^i f(\mathbf{a}) + R_{n+1},$$

missä jäännöstermi  $R_{n+1}$  on muotoa

$$R_{n+1} = \frac{|\mathbf{h}|^{n+1}}{(n+1)!} \partial_{\mathbf{v}}^{n+1} f(\mathbf{a} + \theta \mathbf{h}),$$

missä  $0 < \theta < 1$ .



## Käyrät ja polut, eli kuvaukset $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

### 1. Kuvaukset $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

Tarkastellaan funktiota  $F$ , joilla on esitys

$$F(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_p(t)) \quad t \in D \subset \mathbb{R}.$$

Nyt  $F$  on jatkuva pisteessä  $t_0$ , jos ja vain jos

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F(t_0) \quad \text{eli} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f_i(t) = f_i(t_0)$$

jokaisella  $i = 1, 2, \dots, p$ .

*Esimerkki.* Olkoon

$$F(t) = \begin{cases} (3, -1), & \text{kun } t = 0 \\ (t^2 + 1, t + 2), & \text{kun } t \neq 0 \end{cases}.$$

Tutki  $F$ :n jatkuvuutta.

*Ratkaisu.* Selvästi  $F$  on jatkuva missä tahansa pisteessä  $t \neq 0$ . Nyt

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t) = \left( \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 1), \lim_{t \rightarrow 0} (t + 2) \right) = (1, 2) \neq (3, -1) = F(0),$$

joten  $F$  on epäjatkuvuutta pisteessä 0.

Olkoon  $F: D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ , missä  $D^1$  on jokin  $\mathbb{R}$ :n väli. Nyt  $F$ :n koordinaattifunktio on funktio reaaliluvuilta reaaliluvuille,  $f_i: D^1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Näin ollen tiedämme ennestään mikä on koordinaattifunktion derivaatta. Seuraava lause kertoo mikä on näiden välinen yhteys.

**Lause 3.1.** *Funktio  $F: D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  on differentioituva pisteessä  $a \in \text{Int } D$ , jos ja vain jos  $F$ :n jokainen koordinaattifunktio on derivoituva pisteessä  $a$ . Lisäksi*

$$F'(a) = (f'_1(a) \ f'_2(a) \ \dots \ f'_p(a)).$$

Tämä on Lauseen 2.9 erikoistapaus kun  $n = 1$ , jolloin Jacobin matriisi representoi lineaarikuvausta  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ , eli  $p$ -ulotteista vektoria.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(t) = (t^2 + 1, t + 2)$ ,  $t \in [-2, 2]$ . Piirrä  $F$ :n kuvajoukko, laske  $F$ :n derivaatta mielivaltaisessa pisteessä ja piirrä vektorit  $F'(0)$  ja  $F'(1)$  samaan kuvaan  $F$ :n kuvajoukon kanssa.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(t) = (\cos t, \sin t)$ . Piirrä  $F$ :n kuvajoukko, laske  $F$ :n derivaatta mielivaltaisessa pisteessä ja piirrä vektorit  $F'(0)$ ,  $F'(\pi)$  ja  $F'(\pm \frac{\pi}{2})$  samaan kuvaan  $F$ :n kuvajoukon kanssa.

**Määritelmä 3.2.** Olkoon  $F: D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  differentioituva pisteessä  $a \in D$ . Vektoria  $F'(a)$  kutsutaan  $F$ :n *tangenttivektoriksi* pisteessä  $a$ , ja suoraa  $\mathbf{x} = F(a) + sF'(a)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , sanotaan  $F$ :n *tangentiksi* pisteessä  $F(a)$ , jos  $F'(a) \neq \mathbf{0}$ .

**Lause 3.3.** *Olkoot funktiot  $F, G: D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $\varphi: D^1 \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituvia funktioita. Tällöin*

- (1)  $(F \cdot G)' = F \cdot G' + G \cdot F'$ ;
- (2)  $(\varphi F)' = \varphi' F + \varphi F'$  ja

(3) kun  $p = 3$ ,  $(F \times G)' = F' \times G + F \times G'$ .

TODISTUS. Merkintöjen yksinkertaistamiseksi muuttuja  $t$  jätetään merkitsemättä. Nyt

$$\begin{aligned} (F \cdot G)' &= \left( \sum_{i=1}^p f_i g_i \right)' = \sum_{i=1}^p (f_i g_i)' = \sum_{i=1}^p (f_i g_i' + g_i f_i') \\ &= \sum_{i=1}^p f_i g_i' + \sum_{i=1}^p g_i f_i' = F \cdot G' + G \cdot F'. \end{aligned}$$

Kolmas väite todistetaan kuten toinen väite. Neljäs väite todistetaan seuraavasti (muutama välivaihe on jätetty pois)

$$\begin{aligned} (F \times G)' &= (f_2 g_3 - f_3 g_2, f_3 g_1 - f_1 g_3, f_1 g_2 - f_2 g_1)' \\ &= (f_2 g_3' - f_3 g_2', f_3 g_1' - f_1 g_3', f_1 g_2' - f_2 g_1') \\ &\quad + (g_3 f_2' - g_2 f_3', g_1 f_3' - g_3 f_1', g_2 f_1' - g_1 f_2') \\ &= F \times G' + F' \times G. \end{aligned} \quad \square$$

*Huomautus 3.4.* Funktion (käyrän) kuvajoukko voi johtaa harhaan. Tämä selviää esimerkiksi tutkimalla yhtälöillä

$$F(t) = (t, t^2), \quad G(t) = (t^3, t^6) \quad \text{ja} \quad H(t) = \begin{cases} (t, t^2), & \text{kun } t \geq 0 \\ (t^3, t^6), & \text{kun } t < 0. \end{cases}$$

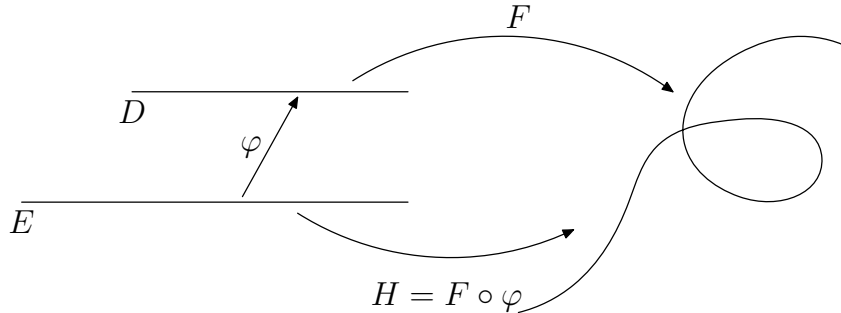
määriteltyjä funktioita  $F$ ,  $G$  ja  $H$  sekä niiden derivaattoja.

## 2. Käyrä, yksinkertainen kaari ja polku

**Määritelmä 3.5.** Avaruuden  $\mathbb{R}^p$  osajoukko  $C$  on *käyrä* (curve), jos on olemassa  $\mathbb{R}$ :n väli  $D$  ja sellainen funktio  $F: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ , että  $F \in C^1(D)$  ja  $F(D) = C$ . Funktiota  $F$  sanotaan käyrän  $C$  *parametriesitykseksi* (parametric representation).

Jos  $p = 2$ , niin käyrää kutsutaan myös *tasokäyräksi* (plane curve), ja jos  $p \geq 3$ , niin käyrää kutsutaan usein *avaruuskäyräksi* (space curve).

**Määritelmä 3.6.** Olkoot  $F: D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $H: \mathbb{R} \supset E \rightarrow \mathbb{R}^p$  kaksi parametriesitystä käyrälle  $C$ . Silloin parametriesitykset  $F$  ja  $H$  ovat *ekvivalentit*, jos on olemassa sellainen differentioituva surjektio  $\varphi: E \rightarrow^1 D$ , että  $H = F \circ \varphi$  ja joko  $\varphi'(u) < 0$  jokaisella  $u \in E$  tai  $\varphi'(u) > 0$  jokaisella  $u \in E$ .



*Esimerkki.* Olkoon  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y - 2)^2 = x - 1\}$ . Nyt  $C$  on käyrä, sillä kuvaus  $F$  voidaan määritellä seuraavasti  $F(t) = (t^2 + 1, t + 2)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ).

*Esimerkkejä.*

- (1) Olkoon  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ . Parametriesitys voidaan valita muun muassa kahdella seuraavalla tavalla:

$$F_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi)$$

ja

$$F_2(t) = (\sin t, -\cos t) \quad t \in [\pi, 3\pi).$$

- (2) Funktion  $F(t) = (t, \cos t, \sin t)$  kuvajoukko on avaruuden  $\mathbb{R}^3$  eräs käyrä — ns. circular helix. Hahmota  $F$  paperille.
- (3) Funktion  $F(t) = (\sin t, \sin(2t))$ ,  $0 \leq t \leq 4\pi$ , kuvajoukko on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  käyrä. Piirrä tämä käyrä.

**Määritelmä 3.7.** Funktio  $F : D^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$  on *sileä* (smooth), jos sekä  $F \in C^1(D^1)$  että  $F'(t) \neq \mathbf{0}$  jokaisella  $t \in D^1$ . Funktio  $F$  on *paloittain sileä* (piecewise smooth) välillä  $[a, b] \subset D$  mikäli on olemassa sellainen välin  $[a, b]$  jako

$$a = p_0 < p_1 < \dots < p_r = b,$$

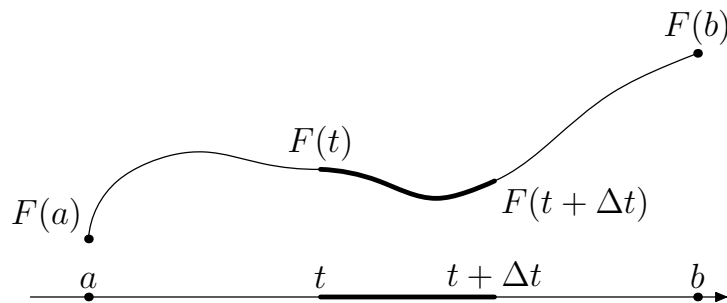
että  $F$  on sileä jokaisella osavälillä  $(p_{i-1}, p_i)$ . Vastaavalla tavalla määritellään paloittain  $C^1$ .

**Määritelmä 3.8.** Käyrä  $C \subset \mathbb{R}^p$  on (*sileä*) *yksinkertainen kaari* (simple arc), jos  $C$ :llä on injektiivinen (*sileä*) parametriesitys  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Tällöin pisteitä  $F(a)$  ja  $F(b)$  kutsutaan  $C$ :n päätepisteiksi ja funktiota  $F$   $C$ :n *yksinkertaiseksi parametriesitykseksi*.

*Esimerkki.* Jos  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on  $C^1$ -funktio, niin  $F(t) = (t, g(t))$ ,  $t \in [a, b]$  on funktion  $g$  kuvaajan parametriesitys. Lisäksi  $F'(t) = (1, g'(t)) \neq \mathbf{0}$ , joten  $F([a, b])$  on yksinkertainen sileä kaari.

**Määritelmä 3.9.** Jatkuvaa funktiota  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$  sanotaan *poluksi* (path) pisteestä  $F(a)$  pisteeseen  $F(b)$ . Polku on differentioituva,  $C^1$  tai sileä mikäli funktiolla  $F$  on vastaava ominaisuus.

Jos  $F$  on differentioituva, niin  $F(t + \Delta t) - F(t) = F'(t)\Delta t + |\Delta t|\rho(t, \Delta t)$ , missä  $\rho(t, \Delta t) \rightarrow \mathbf{0}$ , kun  $\Delta t \rightarrow 0$ . Siten  $|F(t + \Delta t) - F(t)| \approx |F'(t)||\Delta t|$ .



Olkoon  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$   $C^1$ -polku. Tällöin *polun pituus* (path length) määritellään kaavalla

$$l(F) = \int_a^b |F'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(f'_1(t))^2 + \dots + (f'_p(t))^2} dt.$$

*Esimerkki.* Olkoon  $F(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Tällöin

$$\begin{aligned} l(F) &= \int_{-1}^1 |F'(t)| dt \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2} dt \\ &= 2 \int_0^1 t \sqrt{4 + 9t^2} dt \\ &= 2 \left|_0^1 \frac{1}{18} \frac{2}{3} (4 + 9t^2)^{3/2} \right. \\ &= \frac{2}{27} (13\sqrt{13} - 8). \end{aligned}$$

Jos  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$  ja  $H: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^p$  ovat käyrän  $C$  ekvivalentteja parametriesityksiä, niin  $l(F) = l(H)$ . Näin ollen sileän yksinkertaisen kaaren  $C$  *kaaren pituus* (arc length) voidaan määrittellä  $C$ :n sileän parametriesityksen polun pituutena.

*Esimerkki.* Olkoon  $G(u) = (u, \sqrt{R^2 - u^2})$ , missä  $-R \leq u \leq R$ . Olisiko  $G$   $C^1$ -polku? Nyt  $G'(u) = (1, -u(R^2 - u^2)^{-1/2})$ , kun  $-R < u < R$ . Mitä vektorin  $G'(u)$  pitäisi olla, kun  $u = \pm R$ ?

Lasketaan polun  $G$  pituus jonkin  $C^1$ -polun avulla, jolla on sama kuvajoukko kuin  $G$ :llä.

Valitaan uudeksi poluksi  $F(t) = (-R \cos t, R \sin t)$ ,  $t \in [0, \pi]$ .  $F$  on selvästi  $C^1$ -polku ja  $F([0, \pi]) = G([-R, R])$ , joten polun  $G$  pituus voidaan laskea.

$$\begin{aligned} l(F) &= \int_0^\pi |F'(t)| dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt \\ &= R \int_0^\pi dt = R\pi \end{aligned}$$

Olkoon  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti derivoituva funktio. Nyt käyrän  $C = \{(x, g(x)) \mid x \in [a, b]\}$  pituus voidaan laskea seuraavasti. Kaavalla  $F(t) = (t, g(t))$  määritelty polku on selvästi  $C^1$  ja  $l(C) = l(F) = \int_a^b \sqrt{1 + (g'(t))^2} dt$ .

## Funktioiden erityispiirteitä, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

### 1. Gradientti ja suunnattu derivaatta

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva funktio. Vektoria

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial_1 f(\mathbf{x}), \partial_2 f(\mathbf{x}), \dots, \partial_n f(\mathbf{x}))$$

sanotaan funktion  $f$  *gradientiksi* (gradient) pisteessä  $\mathbf{x} \in D^n$ . Usein merkitään

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}).$$

Kuvaus  $\mathbf{x} \mapsto \nabla f(\mathbf{x})$  on siis  $n$ -ulotteinen vektorikenttä. Lisäksi huomataan, että gradientti ei ole mitään muuta kuin funktion Jacobin matriisin transpoosi.

*Esimerkkejä.*

(1) Olkoon  $f(x, y) = x^2y + 6y^2$ . Nyt

$$\nabla f(x, y) = (2xy, x^2 + 12y).$$

(2)

$$f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Kun  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , on

$$\partial_1 f(\mathbf{x}) = \frac{x_1}{|\mathbf{x}|}, \dots, \partial_n f(\mathbf{x}) = \frac{x_n}{|\mathbf{x}|},$$

joten

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}.$$

*Huomautus 4.2.* Käyttäen gradienttimerkintää differentioituvalle funktiolle  $f$  saadaan esitys

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}),$$

missä  $\rho(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

**Määritelmä 4.3.** Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin osajoukko. Sanotaan, että  $D$  on *käyräyhtenäinen*, jos jokaista  $D$ :n pisteparia  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  kohti on olemassa sellainen  $C^1$ -käyrä  $F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , että  $F(\alpha) = \mathbf{a}$ ,  $F(\beta) = \mathbf{b}$  ja  $F(t) \in D$  jokaisella  $t \in [\alpha, \beta]$ .

**Lause 4.4.** *Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin, käyräyhtenäinen joukko ja olkoon  $g \in C^1(D)$ . Jos  $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  jokaisella  $\mathbf{x} \in D$ , niin  $g$  on vakiofunktio joukossa  $D$ .*

**TODISTUS.** Olkoon  $\mathbf{a} \in D$  eräs kiinteä piste ja  $\mathbf{y} \in D$  mielivaltainen. Riittää osoittaa, että  $g(\mathbf{a}) = g(\mathbf{y})$ . Koska  $D$  on käyräyhtenäinen, niin on olemassa sellainen  $C^1$ -käyrä  $F: [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ , että  $F(\alpha) = \mathbf{a}$  ja  $F(\beta) = \mathbf{y}$ . Olkoot  $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Nyt funktio  $h = g \circ F: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva välillä  $[\alpha, \beta]$  ja

$$h'(t) = \nabla g(F(t)) \cdot F'(t) = \mathbf{0} \cdot F'(t) = 0$$

jokaisella  $t \in [\alpha, \beta]$ , joten  $h(t) = c$ , missä  $c$  on  $t$ :stä riippumaton vakio. Näin ollen

$$g(\mathbf{a}) = g(F(\alpha)) = h(\alpha) = h(\beta) = g(F(\beta)) = g(\mathbf{y}). \quad \square$$

**Määritelmä 4.5.** Olkoot  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} \in D^n$  ja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  jokin yksikkövektori. Jos raja-arvo

$$\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t}$$

on äärellisenä olemassa, sitä kutsutaan funktion  $f$  *suunnatuksi derivaataksi* (directional derivative) suuntaan  $\mathbf{v}$  pisteestä  $\mathbf{a}$ .

Suunnatulle derivaatalle  $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$  käytetään myös merkintöjä

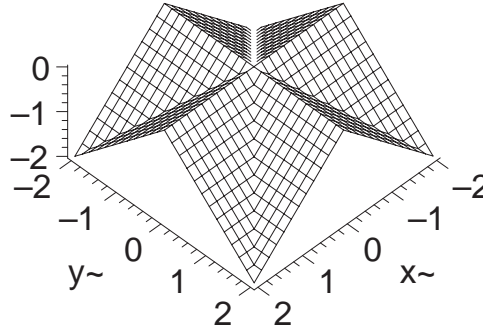
$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{a}) \quad \text{ja} \quad f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{a}).$$

Huomaa, että suunnattu derivaatta suunnassa  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) ei ole mitään muuta kuin osittaisderivaatta.

*Esimerkki.*

$$f(x, y) = \begin{cases} -|y|, & \text{kun } |y| \leq |x| \\ -|x|, & \text{kun } |x| \leq |y| \end{cases}.$$

$f$ :n kuvaaja näyttää lähellä origoa tältä:



Kuvan perusteella voidaan arvailla, että  $f$ :llä ei ole suunnattua derivaattaa ainakaan kaikkiin suuntiin. Perustellaanpa tämä arvaus kunnolla. Koska

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(tx, ty)}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(tx, ty)}{t}$$

ja  $f(x, y) = 0$ , kun  $x = 0$  tai  $y = 0$ , niin suunnattu derivaatta on olemassa vain suuntiin  $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ,  $-\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$  ja  $-\mathbf{e}_2$ .

**Lause 4.6.** Jos  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva pisteessä  $\mathbf{a}$ , niin  $f$ :n suunnattu derivaatta pisteessä  $\mathbf{a}$  on olemassa kaikkiin suuntiin  $\mathbf{v}$  ja lisäksi  $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$ .

**TODISTUS.** Olkoon  $\mathbf{a} \in D$  ja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  annetut. Tarkastellaan yhtälöllä  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$ , missä  $t \in \mathbb{R}$ , määriteltyä kuvausta  $\varphi$ . Nyt

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t - 0} = \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}),$$

joten  $\varphi'(0) = \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a})$  mikäli yhtälön jompikumpi puoli on olemassa. Osoitetaan, että  $\varphi'(0)$  on olemassa. Merkitään

$$G(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a_1 + tv_1, \dots, a_n + tv_n),$$

missä  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  ja  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . Tällöin  $G'(t) = (v_1, \dots, v_n)$ . Toisaalta, koska  $\varphi(t) = f(G(t))$ , niin ketjusäännön nojalla

$$\varphi'(t) = \nabla f(G(t)) \cdot G'(t).$$

Erityisesti

$$\varphi'(0) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}). \quad \square$$

*Esimerkki.* Olkoot  $f(x, y) = x^2y^3$  ja  $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ . Tällöin  $\partial_{\mathbf{v}}f(1, 1)$  saadaan seuraavalla tavalla. Nyt

$$\nabla f(x, y) = (2xy^3, 3x^2y^2),$$

joten

$$\partial_{\mathbf{v}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{v} = (2, 3) \cdot (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Käyttämällä avaruuden  $\mathbb{R}^n$  Cauchy-Schwarzin epäyhtälöä saadaan suunnatulle derivaatalle arvio

$$|\partial_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})| = |\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}| \leq |\nabla f(\mathbf{a})| |\mathbf{v}| = |\nabla f(\mathbf{a})|,$$

missä yhtäsuuruus on voimassa tarkalleen silloin, kun  $\mathbf{v}$  ja  $\nabla f(\mathbf{a})$  ovat yhdensuuntaiset. Tämä merkitsee sitä, että  $\partial_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a})$  on suurimmillaan, kun vektori  $\mathbf{v}$  on samansuuntainen vektorin  $\nabla f(\mathbf{a})$  kanssa, ja pienimmillään, kun  $\mathbf{v}$  on vastakkaisuuntainen vektorin  $\nabla f(\mathbf{a})$  kanssa. Lisäksi nähdään, että  $f$ :n arvojen muutos on pienimmillään, kun  $\mathbf{v}$  on kohtisuorassa  $f$ :n gradienttia vastaan.

## 2. Gradienttivektorin geometrinen tulkinta

*Esimerkki.* Funktio  $f(x, y, z) = \frac{z^2}{x^2+y^2}$  kuvaa lämpötilaa eräässä huonetilassa. Siis esimerkiksi  $f(1, 1, 4) = 8$  (astetta). Mihin suuntaan lämpötila nousee voimakkaimmin pisteessä  $(1, 1, 4)$ .

*Ratkaisu.* Nyt

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{-2xz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-2yz^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2z}{x^2+y^2} \right)$$

ja

$$\nabla f(1, 1, 4) = (-8, -8, 4) = 4(-2, -2, 1).$$

Koska  $|(-2, -2, 1)|^2 = 4 + 4 + 1 = 9$ , niin lämpötila nousee voimakkaimmin suuntaan  $\mathbf{v} = (\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$ .

Olkoon  $f : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  eräs  $C^1$ -funktio. Tarkastellaan funktion  $z = f(x, y)$  tasarvokäyrää  $f(x, y) = c$ . Oletetaan, että  $(a, b)$  on tämän käyrän eräs piste eli  $f(a, b) = c$ . Olkoon  $G(t) = (x(t), y(t))$ , missä  $t \in [\alpha, \beta]$ , (derivoituva) *parametrisitys* (katso sivu 28) tälle samalle käyrälle, ja olkoon  $G(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (a, b)$ . Erityisesti

$$f(G(t)) = f(x(t), y(t)) = c \quad \text{jokaisella } t \in [\alpha, \beta],$$

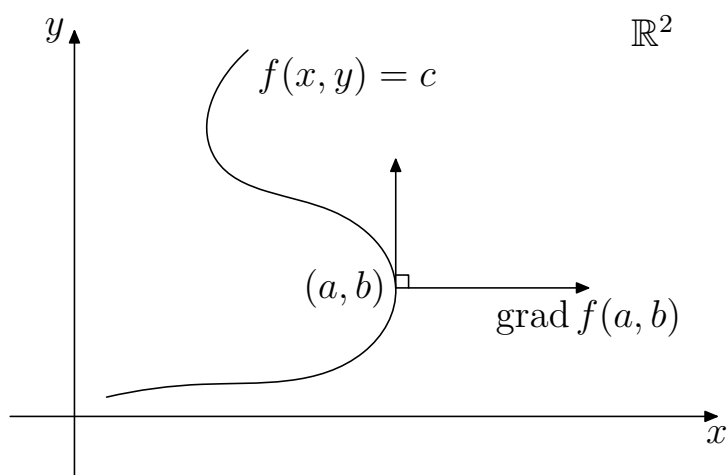
missä  $c$  on  $t$ :stä riippumaton vakio. Käyttämällä ketjusääntöä saadaan yhtälö

$$\frac{d}{dt}f(G(t)) = \partial_1 f(x(t), y(t))x'(t) + \partial_2 f(x(t), y(t))y'(t) = 0,$$

joka pätee jokaisella  $t \in [\alpha, \beta]$ . Siis

$$\nabla f(x(t), y(t)) \cdot G'(t) = 0 \quad \text{jokaisella } t \in [\alpha, \beta].$$

Erityisesti  $\nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot G'(t_0) = 0$  eli kyseiset vektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Toisaalta  $G'(t_0)$  on käyrän  $G$  tangenttivektori pisteessä  $G(t_0)$ , joten vektori  $\nabla f(a, b)$  on käyrän  $f(x, y) = c$  pisteeseen  $(a, b)$  asetetun normaalin suuntavektori (katso sivu 27).



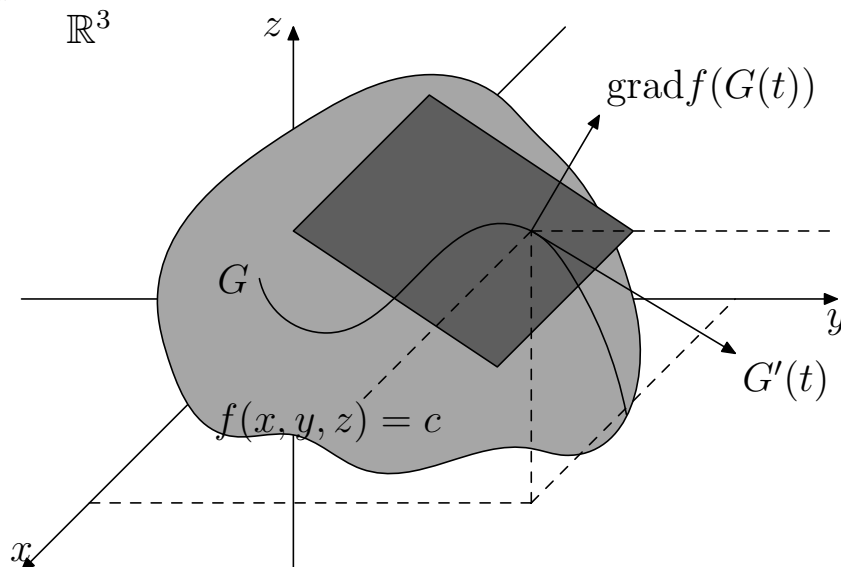
Vastaavalla tavalla nähdään, että funktiolle  $f: D^3 \rightarrow \mathbb{R}$  pisteeseen  $(a, b, c) \in D^3$  liittyvä gradienttivektori  $\nabla f(a, b, c)$  on kohtisuorassa jokaista pinnan  $d = f(x, y, z)$  pisteen  $(a, b, c)$  kautta kulkevaa käyrää  $G$  vastaan. Toisin sanoen, ehdosta

$$f(G(t)) = f(x(t), y(t), z(t)) = d$$

seuraa

$$\nabla f(G(t)) \cdot G'(t) = 0.$$

Siis  $\nabla f$  antaa tasa-arvopinnan normaalin suunnan. Tilannetta havainnollistetaan seuraavalla kuviolla.



Kuvioon on piirretty funktion  $f$  tasa-arvopinta, tasa-arvopinnan erääseen pisteeseen asetettu tangenttitaso, tasa-arvopinnan eräs käyrä  $G$ ,  $G$ :n tangentti pisteessä  $t$  ja tangenttitason normaali, joka on sama kuin  $f$ :n gradientti kyseisessä pisteessä. Kokoamalla edellisen päättelyn tulokset saadaan seuraava lause.

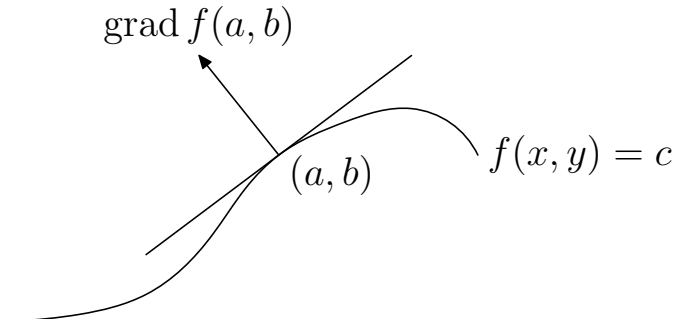
**Lause 4.7.** *Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(D)$  ja  $\nabla f(a, b) \neq \mathbf{0}$ . Tällöin vektori  $\nabla f(a, b)$  on pisteen  $(a, b)$  kautta kulkevan  $f$ :n tasa-arvokäyrän normaali. Jos vastaavasti  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f \in C^1(D)$  ja  $\nabla f(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ , niin  $\nabla f(a, b, c)$  on pisteen  $(a, b, c)$  kautta kulkevan  $f$ :n tasa-arvopinnan normaali.*

**Sovelluksia:**

1) Oletetaan, että  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^1(D)$ ,  $(a, b) \in D$  ja  $f(a, b) = c$ . Tällöin luekaa  $c$  vastaavan tasa-arvokäyrän pisteeseen  $(a, b)$  asetetun normaalin suuntavektori on

$\nabla f(a, b) = (\partial_1 f(a, b), \partial_2 f(a, b))$ , joten samaan pisteeseen asetetun tangentin yhtälö on

$$\partial_1 f(a, b)(x - a) + \partial_2 f(a, b)(y - b) = 0.$$

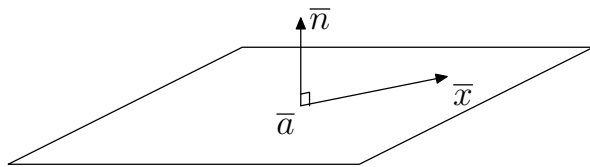


2) Oletetaan, että  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $f \in C^1(D)$ ,  $(a, b, c) \in D$  ja  $f(a, b, c) = d$ . Tällöin lukua  $d$  vastaavan tasa-arvopinnan  $f(x, y, z) = d$  pisteeseen  $(a, b, c)$  asetetun normaalin suuntavektori on

$$\nabla f(a, b, c) = (\partial_1 f(a, b, c), \partial_2 f(a, b, c), \partial_3 f(a, b, c)),$$

joten samaan pisteeseen asetetun tangenttitason yhtälö on

$$\partial_1 f(a, b, c)(x - a) + \partial_2 f(a, b, c)(y - b) + \partial_3 f(a, b, c)(z - c) = 0.$$



$$\begin{aligned} & (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \perp \mathbf{n} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0 \\ & \mathbf{n} = (\partial_1 f(\mathbf{a}), \partial_2 f(\mathbf{a}), \partial_3 f(\mathbf{a})). \end{aligned}$$

*Esimerkki.* Oletetaan, että avaruuden  $\mathbb{R}^3$  pinta on määritelty yhtälöllä  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ . Nyt  $(1, 1, \sqrt{3})$  on pinnan piste. Muodosta kyseisen pinnan pisteeseen  $(1, 1, \sqrt{3})$  asetetun tangenttitason yhtälö.

*Ratkaisu.* Nyt

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) \quad \text{ja} \quad \nabla f(1, 1, \sqrt{3}) = (2, 2, -2\sqrt{3}).$$

Nyt saadaan kyseessä olevan pinnan pisteeseen  $(1, 1, \sqrt{3})$  asetetun tangenttitason yhtälö

$$2(x - 1) + 2(y - 1) - 2\sqrt{3}(z - \sqrt{3}) = 0.$$

*Huomautus 4.8.* Aikaisemmin tarkasteltiin pinnan  $z = f(x, y)$  annetun pisteen kautta kulkevan tangenttitason määräämistä. Olkoon  $c = f(a, b)$ . Tällöin pisteeseen  $(a, b, c)$  asetettu pinnan  $z = f(x, y)$  tangenttitason yhtälö on

$$z - c = (x - a)\partial_1 f(a, b) + (y - b)\partial_2 f(a, b)$$

Toisaalta, jos asetetaan  $g(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$ , niin saadaan

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla g(a, b, c) \cdot ((x - a), (y - b), (z - c)) \\ &= (x - a)\partial_1 g(a, b, c) + (y - b)\partial_2 g(a, b, c) - (z - c)\partial_3 g(a, b, c) \\ &= (x - a)\partial_1 f(a, b) + (y - b)\partial_2 f(a, b) - (z - c) \cdot 1, \end{aligned}$$

mikä on sama yhtälö kuin edellä saatu yhtälö.

### 3. Virheen arviointia

Oletetaan, että fysikaalinen suure  $y$  riippuu muuttujista  $x_1, x_2, \dots, x_n$  kaavan

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ilmoittamalla tavalla. Koetilanteessa suure  $y$  määritetään mittaamalla arvot  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Nämä mittaukset eivät kuitenkaan ole milloinkaan tarkkoja, vaan kunkin osalta tehdään jokin virhe. Merkitään

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{ja} \quad \Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n).$$

Suureen  $y = f(\mathbf{x})$  määrittämisessä käytetään siis todellisuudessa arvoa  $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$  ja päädytään tulokseen  $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})$ . Syntyy virhe

$$\Delta y = f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}).$$

Oletetaan nyt, että  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva ( $f \in C^1$ ). Silloin lauseen 2.8 nojalla

$$(4.9) \quad \Delta y = \partial_1 f(\mathbf{x}) \Delta x_1 + \partial_2 f(\mathbf{x}) \Delta x_2 + \dots + \partial_n f(\mathbf{x}) \Delta x_n + |\Delta \mathbf{x}| \rho(\Delta \mathbf{x}),$$

missä  $\rho(\Delta \mathbf{x}) \rightarrow 0$ , kun  $|\Delta \mathbf{x}| \rightarrow 0$ . Näin ollen pienillä luvun  $|\Delta \mathbf{x}|$  arvoilla voidaan arvioida

$$(4.10) \quad \Delta y \approx \partial_1 f(\mathbf{x}) \Delta x_1 + \dots + \partial_n f(\mathbf{x}) \Delta x_n.$$

Käyttämällä kolmioepäyhtälöä saadaan virheelle ”yläraja”

$$(4.11) \quad |\Delta y| \lesssim |\partial_1 f(\mathbf{x})| |\Delta x_1| + \dots + |\partial_n f(\mathbf{x})| |\Delta x_n|,$$

kun  $|\Delta \mathbf{x}|$  on riittävän pieni. Koska yhtälössä (4.9) termi  $\rho(\Delta \mathbf{x})$  voi olla positiivinen, saattaa yhtälön (4.10) oikea puoli olla sen verran pienempi kuin vasen puoli, ettei kolmioepäyhtälönkään käyttö yhtälön (4.10) oikealla puolella korjaa tilannetta toivotuksi: epäyhtälön (4.11) oikean puolen lauseke ei välttämättä ole todellinen yläraja virheelle vaan se on vain ylärajan arvio tietyllä tarkkuudella. Edellä merkintä  $\lesssim$  onkin niin sanottu *likimäärin pienempi kuin* -merkintä.

Niin sanottu *maksimaalinen virhe* suurelle  $y$  saadaan laskemalla yllä olevan epäyhtälön (4.11) oikea puoli. Muista kuitenkin, että todellinen virhe voi olla suurempi kuin maksimaalinen virhe. *Tarkat virherajat* suurelle  $y$  saadaan tutkimalla erotuksen  $f(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$  vaihteluväli, kun suureen  $\Delta \mathbf{x}$  vaihtelurajat tunnetaan.

*Esimerkki.* Kiihtyvyys lasketaan kaavasta  $a = \frac{v^2}{2s}$ . Matkan  $s$  mittaus antaa 300,0 m tarkkuudella  $\pm 3,0$  m ja nopeuden mittaus antaa 30,00 m/s tarkkuudella  $\pm 1,00$  m/s<sup>2</sup>. Laske kiihtyvyys ja sen virherajat.

*Ratkaisu.* Siis  $a = f(s, v) = \frac{v^2}{2s}$ , joten

$$a = f(300, 30) = \frac{900}{2 \cdot 300} \text{ m/s}^2 = 1,50 \text{ m/s}^2.$$

Lasketaan seuraavaksi virherajat. Koska

$$\Delta a \approx \frac{\partial f}{\partial s}(s, v) \Delta s + \frac{\partial f}{\partial v}(s, v) \Delta v = -\frac{v^2}{2s^2} \Delta s + \frac{v}{s} \Delta v,$$

niin sijoittamalla  $v = 30$  ja  $s = 300$  saadaan

$$(4.12) \quad \Delta a \approx \frac{-1}{200} \Delta s + \frac{1}{10} \Delta v.$$

Käyttämällä yhtälön (4.12) oikeaan puoleen kolmioepäyhtälöä ja sitten sijoittamalla saatun epäyhtälöön tarkkuusraajat  $|\Delta a| \leq 3$  ja  $|\Delta v| \leq 1$  saadaan maksimaalinen virhe

$$|\Delta a| \lesssim \frac{3}{200} + \frac{1}{10} = 0,115$$

eli

$$-0,115 \lesssim \Delta a \lesssim 0,115.$$

Tarkat virherajat saadaan etsimällä lausekkeen

$$f(s + \Delta s, v + \Delta v) - f(s, v)$$

suurin ja pienin arvo väleillä

$$-3 \leq \Delta s \leq 3 \quad \text{ja} \quad -1 \leq \Delta v \leq 1.$$

Muokataan hieman optimoitavaa lauseketta.

$$\begin{aligned} f(s + \Delta s, v + \Delta v) - f(s, v) &= \frac{(v + \Delta v)^2}{2(s + \Delta s)} - \frac{v^2}{2s} \\ &= \frac{(v + \Delta v)^2 s - (s + \Delta s)v^2}{2s(s + \Delta s)} \\ &= \frac{2sv\Delta v + s(\Delta v)^2 - v^2\Delta s}{2s(s + \Delta s)}. \end{aligned}$$

Edellisestä yhtälöstä voidaan päätellä suoraan (miten?), että lauseke  $f(s + \Delta s, v + \Delta v) - f(s, v)$  saavuttaa miniminsä, kun  $\Delta v = -1$  ja  $\Delta s = 3$ , ja maksiminsa, kun  $\Delta v = 1$  ja  $\Delta s = -3$ . Laskemalla lausekkeen arvot kyseisissä pisteissä saadaan (vertaapa tätä virherajaa maksimaaliseen virheeseen!)

$$-0,112 \leq \Delta a \leq 0,118.$$

#### 4. Implisiittifunktioista

Yleensä funktio määritellään eksplisiittisesti antamalla ”sääntö”, jota funktio noudattaa. Esimerkiksi

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1] = D \subset \mathbb{R}.$$

Siis  $D \ni x \mapsto f(x)$  on laskettavissa ja kuvaaja piirrettävissä. Funktion  $f$  kuvaaja  $S = \{(x, \sqrt{1 - x^2}) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1\}$  on yksikköympyrän kaaren  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  osajoukko. Voidaan sanoa, että yhtälö  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  määrittelee funktion  $f$  implisiittisesti (implicitly). Jos merkitään  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ , niin  $F(x, f(x)) = 0$  jokaisella  $x \in [-1, 1]$ . Siis  $f$ :n kuvaaja  $S$  on  $F$ :n tasa-arvokäyrän  $F(x, y) = 0$  osajoukko. Yleistämällä edellinen ajattelu saadaan seuraava määritelmä.

**Määritelmä 4.13.** Olkoon  $F : D^m \rightarrow \mathbb{R}$  ( $m \geq 2$ ). Jos on olemassa sellainen funktio  $f : \bar{D}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , että

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, f(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})) = 0$$

jokaisella joukon  $\bar{D}^{m-1}$  alkiolla  $(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$ , niin sanotaan, että yhtälö  $F(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, x_m) = 0$  määrittelee funktion  $f$  implisiittisesti.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Edellinen yhtälö määrittelee implisiittisesti esimerkiksi seuraavilla yhtälöillä määritellyt funktiot:

- (1)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$  ;
- (2)  $f^*(x) = -\sqrt{1 - x^2} \quad x \in [-1, 1]$  ;
- (3)

$$f^\dagger(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & x \in [-1, 0] \\ -\sqrt{1 - x^2} & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sqrt{1 - x^2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} .$$

Selvästi kaikilla funktioilla on sama määrittelyjoukko  $[-1, 1]$ . Lisäksi voidaan osoittaa, että yhtälö  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  määrittelee äärettömän määrän erilaisia funktioita.

Edellisen esimerkin nojalla tietty yhtälö voi määrittellä useita eri funktioita implisiittisesti.

*Esimerkki.* Oletetaan, että funktio  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  on määritelty kaavalla  $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 - 1$ . Tällöin tasa-arvokäyrä  $F(x_1, x_2, x_3) = 0$  on ellipsoidi ja määrittelee implisiittisesti funktion  $f: D^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 \leq 1\}$  ja  $f(x_1, x_2) = -\sqrt{1 - x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2}$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y) = x^5 + y^5 - 5x^3y$ . Tutki yhtälön  $F(x, y) = 0$  implisiittisesti määrittelemiä funktioita pisteen  $x = 1$  ympäristössä.

*Ratkaisu.* Sijoittamalla  $x = 1$  yhtälöön  $F(x, y) = 0$  saadaan yhtälö

$$F(1, y) = 1 + y^5 - 5y = 0,$$

millä on 3 reaalijuurta. Pisteen  $x = 1$  ”ympäristössä” funktiolla on siis 3 haaraa. Merkitään näitä haaroja symboleilla  $f_1, f_2$  ja  $f_3$ . Tietokoneella tai graafisella laskimella saadaan  $f_1(1) \approx -1,54$ ,  $f_2(1) \approx 0,20$  ja  $f_3(1) \approx 1,44$ .

Esitetään aluksi seuraava erikoistapaus.

**Lause 4.14.** *Olkoon  $F: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti differentioituva pisteen  $(a, b) \in D$  jossain ympäristössä. Oletetaan, että*

- (1)  $F(a, b) = 0$
- (2)  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ .

*Tällöin on olemassa  $a$ :n ympäristö  $N \subset \mathbb{R}$ ,  $b$ :n ympäristö  $M \subset \mathbb{R}$  ja jatkuvasti differentioituva funktio  $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ , jotka toteuttavat ehdot*

- (i)  $f(a) = b$  ja  $f(N) \subset M$
- (ii) jokaisella  $x \in N$  on  $y = f(x)$  yhtälön  $F(x, y) = 0$  yksikäsitteinen ratkaisu, kun  $y$  rajoitetaan joukkoon  $M$ . Lisäksi  $f$ :n derivaatta saadaan kaavasta

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

*jokaisella  $x \in N$ .*

*Huomautus 4.15.* Edellinen lause takaa siis tietyillä ehdoilla ratkaisufunktion olemassaolon muttei anna ratkaisufunktiota eksplisiittisesti eikä anna mitään keinoa millä ratkaisufunktion voi saada yhtälöstä.

*Huomautus 4.16.* Edellisellä lauseella on geometrinen tulkinta (tarkemmin luennolla).

*Huomautus 4.17.* Sen jälkeen, kun differentioituvan ratkaisufunktion olemassaolo on varmistettu ja tunnetaan  $f(t)$ , saadaan sen derivaatan arvot ketjusääntöä käyttäen seuraavalla tavalla.

Merkitään  $G(t) = (t, f(t))$  jokaisella  $t \in N$ . Tällöin

$$0 = (F \circ G)(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, f(t)) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t)) \cdot f'(t),$$

josta voidaan ratkaista  $f'(t)$  mikäli  $\frac{\partial F}{\partial y}(t, f(t)) \neq 0$ . Tätä menettelyä kutsutaan *implisiittiseksi derivoinniksi*.

*Esimerkki.* Palataanpa esimerkkiin 4, jossa tutkittiin yhtälön  $F(x, y) = x^5 + y^5 - 5x^3y = 0$  määrittämien differentioituvien implisiittifunktioiden ominaisuuksia. Nyt voidaan laskea

kyseisten implisiittifunktioiden derivaatat pisteessä  $x = 1$ . Koska  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 5x^4 - 15x^2y$  ja  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 5y^4 - 5x^3$ , niin kaavalla

$$f'_i(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1, f_i(1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(1, f_i(1))}.$$

voidaan laskea  $f'_1(1) \approx -1,22$ ,  $f'_2(1) \approx 0,40$  ja  $f'_3(1) \approx 1,01$ .

Tarkastelemme lopuksi yleistä tapausta  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$ .

**Lause 4.18.** *Olkkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti differentioituva pisteen  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ympäristössä  $D^n$ . Oletetaan, että*

- (1)  $F(\mathbf{a}) = 0$
- (2)  $\partial_n F(\mathbf{a}) \neq 0$ .

*Tällöin on olemassa pisteen  $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  ympäristö  $N$ ,  $a_n$ :nnän ympäristö  $M \subset \mathbb{R}$  ja jatkuvasti differentioituva funktio  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$ , jotka toteuttavat ehdot*

- (i)  $f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = a_n$
- (ii)  $f(N) \subset M$
- (iii) *jokaisella  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in N$   $x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in M$  on yhtälön  $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$  yksikäsitteinen ratkaisu, kun  $x_n$  rajoitetaan joukkoon  $M$ .*

TODISTUS. Katso Baxandall ja Liebeck s. 233 (tapaus  $n=3$ ). □

## 5. Paikalliset ääriarvot

Olkkoon  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $D^n$  on avoin osajoukko.

**Määritelmä 4.19.** Funktiolla  $f$  on *paikallinen minimiarvo* eli *lokaali minimiarvo* (local minimum, relative minimum) pisteessä  $\mathbf{a} \in D$ , jos on olemassa sellainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö  $N$ , että  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$  kaikilla  $\mathbf{x} \in N$ . Piste  $\mathbf{a}$  on tällöin funktion  $f$  paikallinen eli lokaali *minimikohta* (local minimum point).

Funktiolla  $f$  on *paikallinen maksimiarvo* eli *lokaali maksimiarvo* (local maximum, relative maximum) pisteessä  $\mathbf{a} \in D$ , jos on olemassa sellainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö  $N$ , että  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a})$  kaikilla  $\mathbf{x} \in N$ . Piste  $\mathbf{a}$  on tällöin funktion  $f$  paikallinen eli lokaali *maksimikohta* (local maximum point).

Paikallisia minimejä ja maksimeja kutsutaan paikallisiksi ääriarvoiksi.

**Lause 4.20.** *Jos funktiolla  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on paikallinen ääriarvokohta pisteessä  $\mathbf{a}$ , jossa  $f$  on differentioituva, niin  $\partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = 0$  kaikilla yksikkövektoreilla  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .*

TODISTUS. Olkkoon  $\mathbf{a} \in D$  esimerkiksi paikallinen maksimikohta ja  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  mielivaltaisen yksikkövektori. Tällöin

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a}) \leq 0,$$

kun  $t$  on riittävän pieni. Nyt on voimassa epäyhtälöt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \leq 0$$

ja

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} \geq 0.$$

Koska  $f$  on differentioituva, kyseiset raja-arvot ovat samat ja siten

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{a})}{t} = \partial_{\mathbf{v}} f(\mathbf{a}) = 0. \quad \square$$

**Seuraus 4.21.** Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva pisteessä  $\mathbf{a}$  ja olkoon  $\mathbf{a} \in D^n$  funktion  $f$  ääriarvokohta. Tällöin pätee  $\partial_j f(\mathbf{a}) = 0$  jokaisella  $j = 1, 2, \dots, n$  ja siis  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ .

**Määritelmä 4.22.** Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva funktio. Jos  $\mathbf{a} \in D^n$  ja  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ , niin vektorin  $\mathbf{a}$  sanotaan olevan  $f$ :n kriittinen piste (critical point).

*Esimerkki.* Olkoon funktio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty kaavalla  $f(x) = |x|$ . Tutki funktion  $f$  kriittisten pisteiden ja ääriarvojen olemassaoloa.

*Esimerkki.* Tutki funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3$ , kriittisiä pisteitä ja ääriarvokohtia.

*Esimerkki.* Määritellään  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  yhtälöllä  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Määritä funktion  $f$  kriittiset pisteet ja ääriarvokohdat.

**Määritelmä 4.23.** Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  differentioituva funktio. Jos  $\mathbf{a} \in D^n$  on  $f$ :n kriittinen piste muttei ääriarvokohta, niin  $\mathbf{a}$  on  $f$ :n *satulapiste* (saddle point).

Seuraavaksi pyritään luokittelemaan funktion  $f$  kriittiset pisteet.

**Määritelmä 4.24.**  $n \times n$ -matriisi  $A$  on:

- *positiivisesti definiitti* (positively definite), jos  $[\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}] > 0$  jokaisella  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- *negatiivisesti definiitti* (negatively definite), jos  $[\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}] < 0$  jokaisella  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ;
- *indefiniitti* (indefinite), jos lauseke  $[\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}]$  saa sekä negatiivisia että positiivisia arvoja.

**Lemma 4.25.** Olkoon  $A$  symmetrinen  $n \times n$ -matriisi. Tällöin seuraavat virkkeet pitävät paikkansa.

- $A$  on *positiivisesti definiitti* täsmälleen silloin, kun  $A$ :n ominaisarvot ovat *positiivisia*.
- $A$  on *negatiivisesti definiitti*, jos ja vain jos  $A$ :n kaikki ominaisarvot ovat *negatiivisia*.
- $A$  on *indefiniitti* tarkalleen silloin, kun  $A$ :lla on sekä *positiivisia* että *negatiivisia* ominaisarvoja.

TODISTUS. Katso jostain lineaarialgebran tai matriisiteorian oppikirjasta. □

Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2(D^n)$ -funktio. Jos  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$  ja  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D^n$ , voidaan käyttää Taylorin kehitelmää.

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \frac{1}{2}[\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}] + |\mathbf{h}|^2 \eta(\mathbf{h}),$$

missä  $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ . Tässä  $A$  on  $f$ :n Hessin matriisi pisteessä  $\mathbf{a}$ .  $A$  on symmetrinen, sillä  $f \in C^2(D^n)$ . Näin ollen  $A$ :n ominaisarvot ovat reaaliset. Merkitään  $A$ :n pienintä ominaisarvoa symbolilla  $\lambda_{\min}$  ja suurinta symbolilla  $\lambda_{\max}$ . Tällöin on voimassa seuraava epäyhtälö

$$\lambda_{\min} |\mathbf{h}|^2 \leq [\mathbf{h}]^T A[\mathbf{h}] \leq \lambda_{\max} |\mathbf{h}|^2$$

jokaisella  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ . Jos siis  $\mathbf{a}$  on  $f$ :n kriittinen piste, niin  $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$  ja siten

$$\left(\frac{1}{2}\lambda_{\min} + \eta(\mathbf{h})\right) |\mathbf{h}|^2 \leq f(\mathbf{h} + \mathbf{a}) - f(\mathbf{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\lambda_{\max} + \eta(\mathbf{h})\right) |\mathbf{h}|^2.$$

**Lause 4.26.** Olkoot  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2(D^n)$ -funktio,  $\mathbf{a}$  funktion  $f$  kriittinen piste ja  $A$  funktion  $f$  Hessin matriisi pisteessä  $\mathbf{a}$ . Tällöin seuraavat väittämät ovat voimassa:

- (1)  $\mathbf{a}$  on paikallinen minimikohta, jos  $A$  on positiivisesti definiitti.
- (2)  $\mathbf{a}$  on paikallinen maksimikohta, jos  $A$  on negatiivisesti definiitti.
- (3)  $\mathbf{a}$  on satulapiste, jos  $A$  on indefiniitti.

TODISTUS. Valitaan  $\varepsilon > 0$  siten, että  $\mathbf{a} + \mathbf{h} \in D$  jokaisella  $|\mathbf{h}| < \varepsilon$ . Edellä osoitettiin, että

$$\left(\frac{1}{2}\lambda_{\min} + \eta(\mathbf{h})\right)|\mathbf{h}|^2 \leq f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) \leq \left(\frac{1}{2}\lambda_{\max} + \eta(\mathbf{h})\right)|\mathbf{h}|^2,$$

missä  $\eta(\mathbf{h}) \rightarrow 0$ , kun  $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ .

Osoitetaan kohta (1). Jos  $\lambda_{\min} > 0$ , niin on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että  $|\eta(\mathbf{h})| < \frac{1}{2}\lambda_{\min}$ , kun  $|\mathbf{h}| < \delta$ . Tällöin

$$0 < \left(\frac{1}{2}\lambda_{\min} + \eta(\mathbf{h})\right)|\mathbf{h}|^2 \leq f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}),$$

kun  $0 < |\mathbf{h}| < \min\{\delta, \varepsilon\}$ . Siis

$$f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$$

jokaisella  $0 < |\mathbf{h}| < \min\{\delta, \varepsilon\}$ . Täten  $\mathbf{a}$  on  $f$ :n minimikohta.

Kohta (2) osoitetaan vastaavalla tavalla.

Todistetaan kohta (3). Olkoot siis  $\lambda_{\max} > 0$  ja  $\lambda_{\min} < 0$  ja olkoot  $\mathbf{v}_{\max}$  ja  $\mathbf{v}_{\min}$  vastaavat ominaisvektorit. Voidaan olettaa, että  $|\mathbf{v}_{\max}| = |\mathbf{v}_{\min}| = 1$ . Nyt siis  $A\mathbf{v}_{\max} = \lambda_{\max}\mathbf{v}_{\max}$  ja  $A\mathbf{v}_{\min} = \lambda_{\min}\mathbf{v}_{\min}$ . Tällöin

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}_{\max}) - f(\mathbf{a}) &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (s\mathbf{v}_{\max}) + \frac{1}{2}(s\mathbf{v}_{\max})^T A(s\mathbf{v}_{\max}) \\ &\quad + |s\mathbf{v}_{\max}|^2 \eta(s\mathbf{v}_{\max}) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\lambda_{\max}s^2|\mathbf{v}_{\max}|^2 + s^2|\mathbf{v}_{\max}|^2 \eta(s\mathbf{v}_{\max}) \\ &= s^2\left(\frac{1}{2}\lambda_{\max} + \eta(s\mathbf{v}_{\max})\right) > 0, \end{aligned}$$

kun  $s$  on itseisarvoltaan riittävän pieni. Toisaalta

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + s\mathbf{v}_{\min}) - f(\mathbf{a}) &= \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (s\mathbf{v}_{\min}) + \frac{1}{2}(s\mathbf{v}_{\min})^T A(s\mathbf{v}_{\min}) \\ &\quad + |s\mathbf{v}_{\min}|^2 \eta(s\mathbf{v}_{\min}) \\ &= 0 + \frac{1}{2}\lambda_{\min}s^2|\mathbf{v}_{\min}|^2 + |s\mathbf{v}_{\min}|^2 \eta(s\mathbf{v}_{\min}) \\ &= s^2\left(\frac{1}{2}\lambda_{\min} + \eta(s\mathbf{v}_{\min})\right) < 0, \end{aligned}$$

kun  $s$  on itseisarvoltaan riittävän pieni. Näin ollen  $\mathbf{a}$  on satulapiste.  $\square$

Kaikissa tilanteissa ei edellistä lausetta voi käyttää, vaan on käytettävä sopivaa päätelyä. Seuraavassa on pari esimerkkiä jossa lause toimii, ja pari esimerkkiä jotka vaativat lisäpäätelyä.

*Esimerkkejä.*

- (1) Etsi funktion  $f$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , kriittiset pisteet ja tutki niiden laatuja.
- (2) Määritä funktion  $f$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$ , kriittisten pisteiden laadut.
- (3) Olkoon funktio  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty kaavalla  $f(\mathbf{x}) = c$ , missä  $c \in \mathbb{R}$  on kiinteä luku. Tällöin jokainen joukon  $D^n$  piste on funktion minimikohta ja maksimikohta.
- (4) Tutki funktioiden  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ,  $g(x, y) = x^4 - y^4$  ja  $h(x, y) = -x^4 - y^4$  kriittisten pisteiden laatuja.

**Lemma 4.27.** *Olkoon  $A$  symmetrinen  $n \times n$ -matriisi ja olkoon  $A_r$  sen  $r \times r$ -alimatriisi, joka saadaan ottamalla  $r$  ensimmäistä vaaka- ja pystyriviä ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Tällöin  $A$  on positiivisesti definiitti, jos ja vain jos  $\det A_r > 0$  jokaisella  $r = 1, 2, \dots, n$ .*

TODISTUS. Harjoituksissa käydään läpi tapaus  $n = 2$ .  $\square$

*Esimerkki.* Nyt matriisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

on positiivisesti definiitti tarkalleen silloin, kun  $a_{11} > 0$  ja  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ .

**Määritelmä 4.28.** Olkoon  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^2(D^n)$ -kuvaus,  $\mathbf{a} \in D^n$  eräs  $f$ :n kriittinen piste ja  $A$  kuvauksen  $f$  Hessin matriisi pisteessä  $\mathbf{a}$ . Tällöin matriisin  $A$  determinanttia kutsutaan  $f$ :n *diskriminantiksi* pisteessä  $\mathbf{a}$  ja merkitään  $\det A = \Delta_f(\mathbf{a})$ .

*Huomautus 4.29.* Jos  $n = 2$ , niin

$$\Delta_f(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \right)^2.$$

**Lause 4.30.** Olkoon kuvaus  $f: D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sellainen, että  $f \in C^2(D^2)$ . Jos  $\mathbf{a} \in D$  on  $f$ :n kriittinen piste, niin

- (1)  $\mathbf{a}$  on paikallinen minimikohta, jos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0$  ja  $\Delta_f(\mathbf{a}) > 0$ .
- (2)  $\mathbf{a}$  on paikallinen maksimikohta, jos  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) < 0$  ja  $\Delta_f(\mathbf{a}) > 0$ .
- (3)  $\mathbf{a}$  on  $f$ :n satulapiste, jos  $\Delta_f(\mathbf{a}) < 0$ .

**TODISTUS.** Todistetaan kohta 1. Nyt  $\mathbf{a}$  on paikallinen minimikohta, jos  $A$  on positiivisesti definiitti. Lemman 4.27 nojalla täytyy olla  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) > 0$  ja  $\Delta_f(\mathbf{a}) > 0$ .

Osoitetaan kohta 2. Tutkitaan funktiota  $g$ , joka määritellään yhtälöllä  $g(x, y) = -f(x, y)$ . Selvästi  $f$ :n maksimit ovat  $g$ :n minimejä ja kääntäen. Nyt  $g$ :n Hessin matriisi on

$$E = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix},$$

joten  $\Delta_g(\mathbf{a}) = \Delta_f(\mathbf{a})$ . Täten  $\mathbf{a}$  on  $f$ :n maksimi, jos  $\Delta_f(\mathbf{a}) > 0$  ja  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) < 0$ .

Kohta 3. nähdään seuraavalla tavalla. Nyt

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) \end{bmatrix}$$

on symmetrinen  $2 \times 2$ -matriisi, joten se on diagonalisoituva eli on olemassa sellainen säännöllinen  $2 \times 2$ -matriisi  $D$ , että  $A = DBD^{-1}$ , missä  $B$  on diagonaalimatriisi. Itseasiassa

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

missä  $\lambda_1$  ja  $\lambda_2$  ovat  $A$ :n ominaisarvot. Determinantin laskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} \det A &= \det(DBD^{-1}) = (\det D)(\det B)(\det D^{-1}) \\ &= (\det D)(\lambda_1 \lambda_2)(\det D)^{-1} = \lambda_1 \lambda_2. \end{aligned}$$

Koska nyt täytyy olla  $\lambda_{\max} > 0$  ja  $\lambda_{\min} < 0$  (oletuksen nojalla  $\det A < 0$ ), niin  $\mathbf{a}$ :n täytyy olla satulapiste.  $\square$

*Esimerkki.* Olkoon  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ . Määritä  $f$ :n kriittiset pisteet ja niiden laadut.

*Esimerkki.* Määritä funktion  $f$ ,  $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ , kriittiset pisteet ja niiden laadut.

## 6. Globaalit ääriarvot

Olkoon  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Yksinkertaisin optimoititehtävä on määrätä funktion  $f$  suurin ja pienin arvo annetussa kompaktissa joukossa  $K \subset D^n$ .

Aloitetaan ääriarvon olemassaoloa koskevalla lauseella. Alkuverryttelyä voit osoittaa, että identtisellä funktiolla  $x \mapsto x$  ei saavuta ääriarvojaan joukoissa  $(0, 1)$ ,  $(0, \infty)$  ja  $\{x \in \mathbb{Q} \mid |x| \leq \sqrt{2}\}$ .

**Lemma 4.31.** *Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukko  $S$  on kompakti, jos ja vain jos jokaisella joukon  $S$  pistejonoilla on joukossa  $S$  suppeneva osajono.*

TODISTUS. Oletetaan, että  $S \subset \mathbb{R}^n$  on kompakti ja että  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^\infty$  on mikä tahansa joukon  $S$  jono. Merkitään

$$\mathbf{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}).$$

Koska  $S$  on rajoitettu joukko, niin on olemassa luku  $M > 0$ , jolle pätee  $|\mathbf{a}_k| \leq M$  jokaisella  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Näin ollen jokainen koordinaattijono  $(a_k^{(i)})_{k=1}^\infty$  on rajoitettu reaalilukujono ja siksi jonosta  $(a_k^{(1)})_{k=1}^\infty$  voidaan valita suppeneva osajono  $(a_{k_{j_1}}^{(1)})_{j_1=1}^\infty$ . Tällöin jonon  $(\mathbf{a}_{k_{j_1}})_{j_1=1}^\infty$  ensimmäinen koordinaattijono suppenee, ja lisäksi  $(\mathbf{a}_{k_{j_1}})_{j_1=1}^\infty$  on rajoitetun jonon osajonona rajoitettu, joten sen toisella koordinaattijonolla  $(a_{k_{j_2}}^{(2)})_{j_2=1}^\infty$  on suppeneva osajono  $(a_{k_{j_2}}^{(2)})_{j_2=1}^\infty$ . Nyt siis jonon  $(\mathbf{a}_{k_{j_2}})_{j_2=1}^\infty$  ensimmäinen ja toinen koordinaattijono suppenevat. Jatkamalla edellistä päättelyä edelleen saadaan lopulta jonon  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^\infty$  osajono, jonka kaikki koordinaattijonot suppenevat.

Oletetaan, että joukon  $S$  jokaisella jonolla on  $S$ :ssä suppeneva osajono. Helposti päätellään, että  $S$  on välttämättä rajoitettu. Osoitetaan, että  $S$  on suljettu. Olkoon  $\mathbf{a} \in \partial S$ . Koska jokainen pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristö sisältää joukon  $S$  pisteitä, niin jokaisesta  $\mathbf{a}$ -keskisestä avoimesta  $\frac{1}{k}$ -säteisestä pallosta ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) voidaan valita piste  $\mathbf{a}_k$  siten, että  $\mathbf{a}_k \in S$ . Saadaan joukon  $S$  jono  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^\infty$ , joka suppenee kohti pistettä  $\mathbf{a}$ . Koska oletuksen nojalla tämän jonon erään osajonon raja-arvo kuuluu joukkoon  $S$ , niin  $\mathbf{a} \in S$ .  $\square$

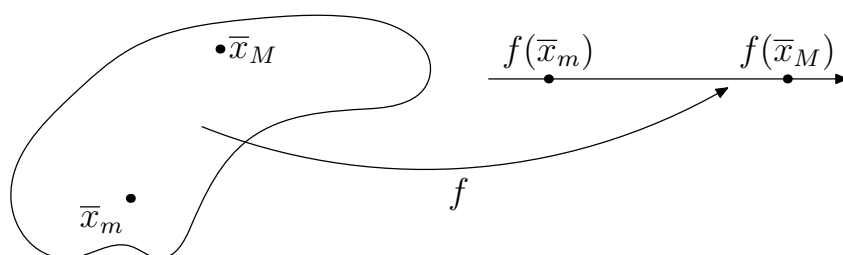
**Lause 4.32.** *Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakti osajoukko ja  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^p$  jatkuva kuvaus. Tällöin kuvajoukko  $F(S)$  on avaruuden  $\mathbb{R}^p$  kompakti osajoukko.*

TODISTUS. Lemman 4.31 nojalla riittää osoittaa, että jokaisella joukon  $F(S)$  jonolla on suppeneva osajono. Olkoon  $(\mathbf{b}_k)_{k=1}^\infty$  jokin jono joukossa  $F(S)$ . Siis jokaisella  $k \in \mathbb{Z}_+$  pätee  $\mathbf{b}_k = F(\mathbf{a}_k)$  jollakin  $\mathbf{a}_k \in S$ . Koska  $S$  on kompakti, niin jonolla  $(\mathbf{a}_k)_{k=1}^\infty$  on osajono  $(\mathbf{a}_{k_j})_{j=1}^\infty$ , jolle  $\mathbf{a}_{k_j} \rightarrow \mathbf{a} \in S$ , kun  $j \rightarrow \infty$ . Funktion  $F$  jatkuvuuden nojalla  $\lim_{j \rightarrow \infty} \mathbf{b}_{k_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} F(\mathbf{a}_{k_j}) = F(\mathbf{a}) \in F(S)$ .  $\square$

**Seuraus 4.33.** *Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^n$  kompakti ja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva kuvaus. Tällöin  $f$  saavuttaa pienimmän ja suurimman arvonsa joukossa  $S$ : on olemassa sellaiset pisteet  $\mathbf{x}_m$  ja  $\mathbf{x}_M$  joukossa  $S$ , että*

$$f(\mathbf{x}_m) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_M) \quad \text{kaikilla } \mathbf{x} \in S.$$

TODISTUS. Edellisen lauseen nojalla  $f(S) \subset \mathbb{R}$  on suljettu ja rajoitettu osajoukko, joten siinä on olemassa suurin ja pienin alkio.  $\square$



Jos  $K \subset \mathbb{R}^n$  on kompakti ja  $f: K \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuvasti differentioituva ja jos  $M = \max_{x \in K} f(x) = f(a)$ , missä  $a \in K$ , niin joko  $a$  on  $K$ :n sisäpiste tai  $a$  on  $K$ :n reunan  $\partial K$  piste. Siis joko  $a$  on  $f$ :n paikallinen maksimikohta tai  $a$  on  $\partial K$ :n piste, jossa  $f$  saavuttaa suurimman arvonsa. Näin ollen funktion  $f$  maksimikohta  $a \in K$  löydetään määrittämällä:

- (1)  $f$ :n kaikki kriittiset pisteet  $K$ :n sisällä
- (2)  $f$ :n maksimikohta reunalla  $\partial K$ .

ja valitsemalla näistä pisteistä se piste, jossa  $f$ :n arvo on suurin.

Vastaava päättely voidaan tehdä myös minimikohtalle.

*Esimerkki.* Olkoon funktio  $f$  määritelty kaavalla  $f(x, y) = x + x^2 + y^2$ . Määrä  $f$ :n suurin ja pienin arvo joukossa  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

*Esimerkki.* Mikä on tilavuudeltaan suurin suorakulmainen suuntaissärmiö, jonka tahkot ovat koordinaattitasojen suuntaiset ja joka voidaan "sahata" paraboloidin osasta  $x^2 + 4y^2 \leq z \leq 1$ .

Jos  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva funktio ja  $D^n$  ei ole kompakti, niin funktio ei välttämättä saa joukossa  $D^n$  suurinta tai pienintä arvoa. On siis käytettävä tehtäväkohtaisesti sopivaa päättelyä.

*Esimerkki.* Määritä funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , joka määritellään relaatiolla  $f(x, y) = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2)$ , suurin ja pienin arvo.

*Ratkaisu.* Merkitään  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Nyt

$$\begin{cases} f(x, y) > 0, & \text{kun } (x, y) \in K \\ f(x, y) = 0, & \text{kun } (x, y) \in \partial K \\ f(x, y) < 0, & \text{kun } (x, y) \notin K \end{cases}$$

Nyt  $f$  ei saa pienintä arvoa, koska  $f(x, x) \rightarrow -\infty$ , kun  $|x| \rightarrow \infty$ . Riittää siis etsiä funktion  $f$  suurin arvo. Määritetään funktion  $f$  kriittiset pisteet. Jos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2 - 2x) \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^{x+y}(4 - x^2 - y^2 - 2y) \end{aligned}$$

niin  $x = y$ . Sijoittamalla saatu tulos yhtälöön  $4 - x^2 - y^2 - 2x = 0$  saadaan yhtälö  $x^2 + x - 2 = 0$ , minkä juuret ovat  $-2$  ja  $1$ . Näin ollen  $f$ :n kriittiset pisteet ovat  $(1, 1)$  ja  $(-2, -2)$ . Koska  $(-2, -2) \notin K$ , niin  $f$  saavuttaa maksiminsa pisteessä  $(1, 1)$  (miksi?), ja maksimiarvo on  $f(1, 1) = e^2(4 - 1 - 1) = 2e^2$ .

*Esimerkki.* Määritä yhtälöllä  $f(x, y) = \frac{4x-3}{1+x^2+y^2}$  määritellyn funktion suurin ja pienin arvo mikäli mahdollista.

## 7. Sidotut ääriarvot

Usein optimointitehtävään liittyy muuttujaa rajoittavia lisäehtoja eli side-ehtoja.

*Esimerkki.* Suunnittele suorakulmaisen särmiön muotoinen kanneton astia, johon mahtuu  $V$  litraa nestettä ja jonka valmistamiseen kuluu mahdollisimman vähän materiaalia.

*Ratkaisu.* Mikäli suorakulmaisen särmiön sivujen pituudet ovat  $x$ ,  $y$  ja  $z$ , niin astian tilavuus noudattaa kaavaa  $V = xyz$ , missä  $V$  on annettu kiinteä positiivinen luku. Astian sivutahkojen pinta-alan ja pohjan pinta-alan summa noudattaa puolestaan kaavaa  $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ . On siis löydettävä astian vaipan kokonaispinta-alan  $g$  minimi, kun muuttujia  $x$ ,  $y$  ja  $z$  sitoo ehto  $V = xyz$ . Nyt voidaan rajoittaa joukkoon  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y > 0 \text{ ja } z > 0\}$ . Tässä tapauksessa voidaan ehtoyhtälöstä  $V = xyz$  ratkaista muuttuja  $z$  ja sijoittaa sitten lauseke  $z = \frac{V}{xy}$  pinta-alan lausekkeeseen  $g$ . Siis

$$h(x, y) := g(x, y, \frac{V}{xy}) = xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y},$$

missä  $x, y > 0$ . Näin ollen on etsittävä minimiä kuvaukselle  $h : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , missä  $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ . Etsitään  $h$ :n kriittiset pisteet. Yhtälöistä

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = y - \frac{2V}{x^2} = 0$$

ja

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = x - \frac{2V}{y^2} = 0$$

seuraa  $xy^2 = x^2y = 2V$ , mistä edelleen seuraa  $x = y = \sqrt[3]{2V}$ . Siis  $h$ :lla on ilmeisesti minimikohtana  $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$  (tämä pitää tietenkin perustella), jolloin  $h(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 3(2V)^{2/3}$  ja  $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ .

*Huomautus 4.34.* Edellisen esimerkin funktiolla  $g$  ei ole paikallisia ääriarvoja joukossa  $\mathbb{R}^3$ .  $g$ :n ainoa kriittinen piste  $(0, 0, 0)$  on  $g$ :n satulapiste. Tässä tehtävässä lisäehdot  $xyz = V$  ja  $x, y, z > 0$  rajoittavat  $g$ :n määrittäjäjoukon sellaiselle avaruuden  $\mathbb{R}^3$  pinnalle  $S$ , että  $g$  saavuttaa siinä pienimmän arvonsa. Siis

$$\min_{(x,y,z) \in S} g(x, y, z) = g(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}) = 3(2V)^{2/3}.$$

*Huomautus 4.35.* Tässä esimerkkitapauksessa onnistuimme ratkaisemaan muuttujan  $z$  lisäehdosta  $V = xyz$ . Aina tämä ei tietenkään ole mahdollista. Esimerkiksi lisäehdoista

$$x + y + z - \sin(xyz) = 0$$

ja

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 - 1 = 0$$

muuttujien ratkaiseminen voi olla hankalaa. (Jälkimmäisestä ehdosta voidaan ratkaista kukin muuttuja mutta saadaan kuitenkin kaksi ratkaisua.)

Edellä mainitut vaikeudet voidaan voittaa käyttämällä niin sanottua *Lagrangen kertojien menetelmää* (method of Lagrange multipliers). Tämän menetelmän geometrinen perustelu on seuraava.

Olkoon  $g : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  annettu jatkuvasti differentioituva funktio. Tehtävänä on tutkia  $g$ :n ääriarvoja toisen jatkuvasti differentioituvan funktion  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  määrittelemässä tasa-arvojoukossa

$$S = \{\mathbf{x} \in D^n \mid f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

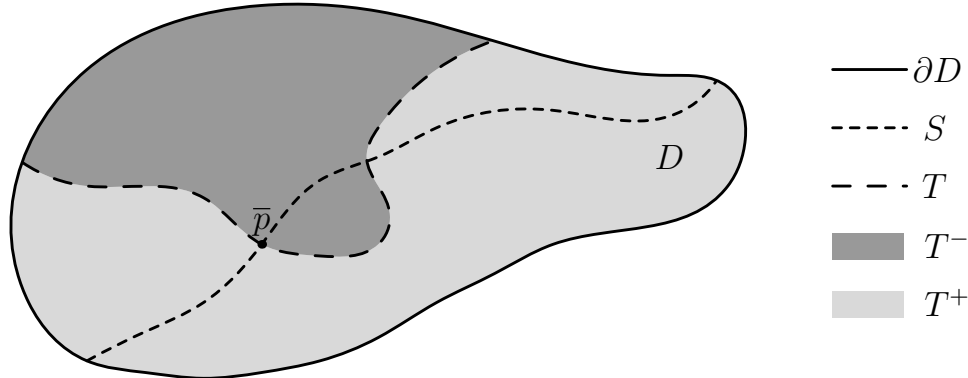
Olkoon nyt  $\mathbf{p} \in S$ . Merkitään

$$T = \{\mathbf{x} \in D^n \mid g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{p})\}$$

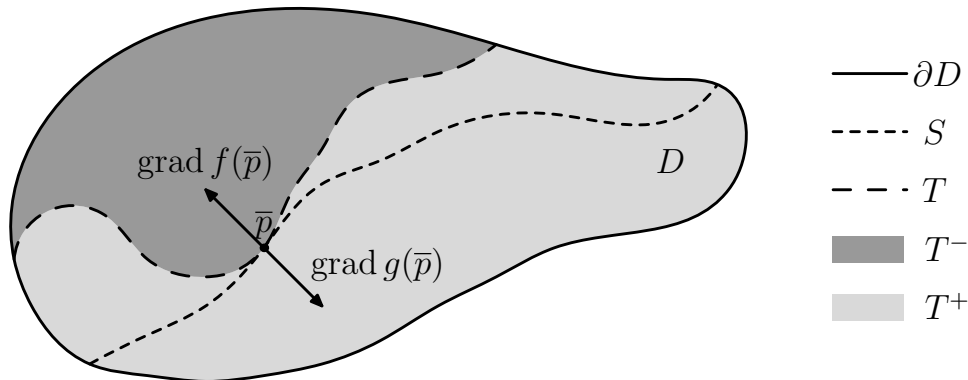
$$T^+ = \{\mathbf{x} \in D^n \mid g(\mathbf{x}) > g(\mathbf{p})\}$$

$$T^- = \{\mathbf{x} \in D^n \mid g(\mathbf{x}) < g(\mathbf{p})\}.$$

Ilmeisesti  $D^n$  jakautuu kolmeen erilliseen osaan  $T$ ,  $T^-$  ja  $T^+$ , ja ilmeisesti  $T$  on reuna joukkojen  $T^-$  ja  $T^+$  välissä. Lisäksi  $\mathbf{p} \in S$  ja  $\mathbf{p} \in T$ . Jos nyt  $\mathbf{p}$  on funktion  $g: S^n \rightarrow \mathbb{R}$  ääriarvokohta, niin riittävän pienellä  $\varepsilon > 0$  joukko  $B(\mathbf{p}, \varepsilon) \cap S^n$  ei voi sisältää sekä joukon  $T^-$  että joukon  $T^+$  alkioita.



Tämä tarkoittaa sitä, että joukko  $S^n$  ja  $g$ :n tasa-arvojoukko  $T$  "sivuavat" toisiaan pisteessä  $\mathbf{p}$ , jos  $\mathbf{p}$  on edellä mainittu ääriarvokohta. Siis vektorit  $\text{grad } f(\mathbf{p})$  ja  $\text{grad } g(\mathbf{p})$  ovat yhdensuuntaisia (eli vastakkais- tai samansuuntaisia).



On kuitenkin huomattava, että kaikki ne pisteet  $\mathbf{p}$ , joissa kyseessä olevat gradientti-vektorit ovat yhdensuuntaiset, eivät välttämättä ole  $g$ :n ääriarvokohtia.

Menetelmä voidaan täsmällisesti esittää seuraavana lauseena, jonka todistus perustuu implisiittifunktiolauseeseen.

**Lause 4.36.** *Olkoot  $g: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f: D^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti differentioituvia funktioita ( $n \geq 2$ ). Olkoon*

$$S = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^n \mid f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

*ja  $\mathbf{p} \in S$  sellainen piste, että  $\text{grad } f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$ . Jos  $\mathbf{p}$  on  $g$ :n ääriarvokohta joukon  $S$  suhteen, niin on olemassa sellainen  $\lambda \in \mathbb{R}$ , että*

$$\text{grad } g(\mathbf{p}) = \lambda \text{grad } f(\mathbf{p}).$$

TODISTUS. Katso Liebeckin ja Baxandallin kirja sivu 245. □

**Seuraus 4.37** (Lagrangen menetelmä). *Olkoot  $f, g$  ja  $S$  kuten edellä. Jos  $\mathbf{p} \in S$  on  $g$ :n ääriarvokohta joukon  $S$  suhteen, niin joko*

- (1)  $f(\mathbf{p}) = 0$  ja  $\text{grad } f(\mathbf{p}) = \mathbf{0}$  tai
- (2)  $f(\mathbf{p}) = 0$ ,  $\text{grad } f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$  ja  $\text{grad } g(\mathbf{p}) = \lambda \text{grad } f(\mathbf{p})$  jollakin  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Edellisen määritelmän ehdoissa 1. ja 2. olevien yhtälöiden ratkaisuja  $\mathbf{p}$  sanotaan  $g$ :n kriittisiksi pisteiksi joukon  $S$  suhteen. Huomaa, että kriittinen piste ei aina ole ääriarvokohta.

*Esimerkki.* Tarkastellaan jälleen esimerkkiä 7. Siis  $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$ ,  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\}$  ja  $f(x, y, z) = xyz - V = 0$ . Tällöin

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0, \quad x, y, z > 0\}.$$

Etsitään kriittiset pisteet joukon  $S$  suhteen.

(a) Tutkitaan ehtojen  $xyz - V = 0$  ja  $\text{grad } f(x, y, z) = \mathbf{0}$  yhtäaikaista voimassaoloa. Siis

$$xyz - V = 0 \quad \text{ja} \quad (yz, xz, xy) = (0, 0, 0).$$

Koska  $xyz = V > 0$ , niin ehdot eivät voi olla yhtäaikaista voimassa joukossa  $D$ .

(b) Tutkitaan milloin ehdot  $xyz - V = 0$ ,  $\text{grad } f(x, y, z) \neq \mathbf{0}$  ja  $\text{grad } g(x, y, z) = \lambda \text{grad } f(x, y, z)$  ovat voimassa samanaikaisesti. Nyt yhtälöistä

$$xyz = V \quad \text{ja} \quad (y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = \lambda(yz, xz, xy)$$

seuraa  $x = y = 2z$ , joten  $x = y = \sqrt[3]{2V}$  ja  $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$ . Tehtävän geometrisesta luonteesta seuraa, että piste  $(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V})$  on minimikohta.

*Esimerkki.* Minimoi funktio  $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2$  lisäehdolla  $x^2 + y^2 - 2xy = 0$ .

*Esimerkki.* Minimoi lauseke  $g(x, y, z) = x + y + z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , lisäehdolla  $f(x, y, z) = x^2 - y^2 - x - y - z = 0$ .



## Kaksinkertainen integraali tasossa $\mathbb{R}^2$

### 1. Funktion integraali yli suorakulmion

Olkoot  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}$  annettu suorakulmio tasossa  $\mathbb{R}^2$  ja  $f : R \rightarrow \mathbb{R}$  annettu rajoitettu funktio. Siis on olemassa luvut  $m, M \in \mathbb{R}$ , joille

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad \text{jokaisella} \quad (x, y) \in R.$$

Olkoot  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = b$  ja  $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{l-1} < y_l = d$  välien  $[a, b]$  ja  $[c, d]$  jakoja. Näin saadaan  $R$ :n jako  $\mathcal{P}$  suorakulmioihin

$$R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

$i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, l.$

Suorakulmion  $R_{ij}$  pinta-ala  $A_{ij}$  on

$$A_{ij} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Olkoon

$$m_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y) \quad \text{ja} \quad M_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y).$$

Siis jokaisella  $\mathbf{p}_{ij} \in R_{ij}$  on voimassa kaksoisepähtälö

$$m_{ij}A_{ij} \leq f(\mathbf{p}_{ij})A_{ij} \leq M_{ij}A_{ij}.$$

Määritellään jakoon  $\mathcal{P}$  liittyvät *Riemannin summat*: lauseke

$$A(f, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} m_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l m_{ij}A_{ij}$$

on niin sanottu jakoon  $\mathcal{P}$  liittyvä alasumma ja lauseke

$$Y(f, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} M_{ij}A_{ij}$$

on vastaavasi jakoon  $\mathcal{P}$  liittyvä yläsumma. Selvästi

$$A(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq l}} f(\mathbf{p}_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \leq Y(f, \mathcal{P})$$

**Määritelmä 5.1.** Sanotaan, että  $R$ :n jako  $\mathcal{P}^*$  on jaon  $\mathcal{P}$  *hienonnus* (refinement), jos jokainen jaon  $\mathcal{P}^*$  suorakulmio on jonkin  $\mathcal{P}$ :n suorakulmion osajoukko.

Jos  $\mathcal{P}_1$  ja  $\mathcal{P}_2$  ovat  $R$ :n jakoja, saadaan luontevasti näiden yhteinen hienonnus  $\mathcal{P}^*$  käyttämällä molempien jakopisteitä. Helposti todetaan, että

$$A(f, \mathcal{P}_1) \leq A(f, \mathcal{P}^*) \leq Y(f, \mathcal{P}^*) \leq Y(f, \mathcal{P}_2).$$

Toisin sanoen alasummat ovat aina yläsummien ”alapuolella”.

**Määritelmä 5.2.** Rajoitettu funktio  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on *Riemannin mielessä integroitava yli suorakulmion  $Q$* , jos

$$\sup_{\mathcal{P}} A(f, \mathcal{P}) = \inf_{\mathcal{P}} Y(f, \mathcal{P}).$$

Tätä yhteistä raja-arvoa sanotaan funktion  $f$  integraaliksi yli suorakulmion  $Q$  ja merkitään symbolilla

$$\iint_R f \, dA \quad \text{tai} \quad \iint_Q f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{tai} \quad \iint_Q f.$$

**Lause 5.3.** *Rajoitettu funktio  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on integroitava yli suorakulmion  $Q$ , jos ja vain jos jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa  $Q$ :n jaot  $\mathcal{P}_1$  ja  $\mathcal{P}_2$  siten, että*

$$Y(f, \mathcal{P}_1) - A(f, \mathcal{P}_2) < \varepsilon.$$

TODISTUS. Seuraa suoraan määritelmästä.  $\square$

*Esimerkki.* Olkoot  $R = [-1, 0] \times [-1, 0]$  ja  $f(x, y) = -x$ . Laske  $f$ :n integraali yli joukon  $R$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ . Olkoon funktio  $f$  määritelty asettamalla

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x, y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Onko  $f$  integroitava yli joukon  $R$ ?

Seuraava lause on ilmeinen.

**Lause 5.4.** *Olkoot  $f, g : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettuja integroitavia funktioita yli suorakulmion  $Q$  ja olkoot  $k \in \mathbb{R}$ . Tällöin  $f + g$  ja  $kf$  ovat integroitavia yli  $Q$ :n ja*

$$\iint_Q (f + g) \, dA = \iint_Q f \, dA + \iint_Q g \, dA \quad \text{ja} \quad \iint_Q (kf) \, dA = k \iint_Q f \, dA.$$

**Lause 5.5.** *Jos  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva rajoitetussa suorakulmiossa  $Q = [a, b] \times [c, d]$ , niin se on integroitava yli  $Q$ :n.*

TODISTUS. Koska  $Q$  on suljettu ja rajoitettu ja  $f$  on jatkuva  $Q$ :ssä, on  $f$  tasaisesti jatkuva  $Q$ :ssä. Siis jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa  $\delta > 0$  niin, että

$$|f(\mathbf{v}) - f(\mathbf{w})| < \varepsilon$$

aina, kun  $|\mathbf{v} - \mathbf{w}| < \delta$  ja  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in Q$ . Olkoon nyt  $\varepsilon > 0$  annettu ja  $\mathcal{P}$  sellainen  $Q$ :n jako, että suorakulmion  $Q_{ij}$  lävistäjä on pienempi kuin  $\delta$  kaikilla  $i = 1, 2, \dots, k$  ja  $j = 1, 2, \dots, l$ . Jos nyt  $m_{ij} = \min_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x, y)$  ja  $M_{ij} = \max_{(x,y) \in Q_{ij}} f(x, y)$ , niin

$$M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$$

kaikilla  $i, j$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} Y(f, \mathcal{P}) - A(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l (M_{ij} - m_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \varepsilon (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \varepsilon(b-a)(d-c). \end{aligned}$$

Koska  $\varepsilon$  voidaan valita mielivaltaisen pieneksi, niin väite seuraa  $\square$

Seuraavaksi pyritään johtamaan käyttökelpoinen laskutapa integraalille

$$\iint_Q f \, dA.$$

Olkoon kuvaus  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva ja positiivinen suorakulmiossa  $Q = [a, b] \times [c, d]$ . Siis  $\iint_Q f \, dA$  on hyvin määritelty lauseen 5.5 nojalla ja se antaa pinnan  $z = f(x, y)$  ja  $xy$ -tason suorakulmion  $Q$  kohdalle rajoittaman kappaleen tilavuuden. Taso  $x = p$  leikkaa tämän kappaleen jokaisella  $p \in [a, b]$  ja poikkileikkauspinta-ala on

$$F(p) = \int_c^d f(p, y) \, dy.$$

Koska tämä integraali on hyvin määritelty jokaisella  $p \in [a, b]$ , saadaan funktio  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Jos otetaan kappaleesta viipale tasojen  $x = p$  ja  $x = p + \Delta x$  välistä, on viipaaleen tilavuus likimäärin yhtäsuuri kuin  $F(p)\Delta x$ , mikä viittaa siihen, että koko kappaleen tilavuus on

$$V = \iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) \, dy \right\} dx.$$

Siis kaksinkertainen integraali yli suorakulmion  $Q$  saadaan kahtena peräkkäisenä integrointina yli suljettujen välien eli niin sanottuna *toistettuna integrointina* (repeated integration). Toistetusta integroinnista käytetään myös merkintää

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

Tämä menettely todistetaan kohta täsmällisesti.

*Huomautus 5.6.* Yllä esitetty päättely voidaan suorittaa myös toisessa järjestyksessä, jolloin saadaan vastaavasti

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

*Esimerkki.* Laske funktion  $f$ , jolle  $f(x, y) = xy$ , integraali yli joukon  $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ .

*Esimerkki.* Laske funktion  $f$ ,  $f(x, y) = x^2 + y$ , integraali yli joukon  $Q = [0, 1] \times [1, 3]$ .

**Lause 5.7.** *Olkoot  $Q = [a, b] \times [c, d]$  rajoitettu suorakulmio ja  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu integroituva funktio. Jos integraali*

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

*on olemassa jokaisella  $x \in [a, b]$ , niin  $F$  on integroituva välillä  $[a, b]$  ja*

$$\iint_Q f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx.$$

**TODISTUS.** Olkoon  $m \leq f(x, y) \leq M$  jokaisella  $(x, y) \in Q$ . Siis jokaisella  $p \in [a, b]$  on

$$m(d - c) \leq \int_c^d f(p, y) \, dy \leq M(d - c).$$

Näin ollen  $F$  on rajoitettu funktio välillä  $[a, b]$  ja sen ylä- ja alasummat ovat äärellisiä jokaisella välin  $[a, b]$  jaolla  $\Pi$  ja  $A(f, \Pi) \leq Y(f, \Pi)$ . Olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Koska  $f$  on oletuksen mukaan integroituva yli  $Q$ :n, on olemassa  $Q$ :n jako

$$\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b \quad \text{ja} \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_l = d.$$

niin, että

$$Y(f, \mathcal{P}) - A(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Merkitään välin  $[a, b]$  jakoa  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$  symbolilla  $\pi$ . Olkoon nyt  $p_i \in [x_{i-1}, x_i]$  jokaisella  $i = 1, 2, \dots, k$ . Tällöin millä tahansa indeksiparilla  $i, j$  on voimassa kaksoisepäytälö

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(p_i, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1}).$$

Kerrottaessa kyseinen kaksoisepäytälö puolittain luvulla  $(x_i - x_{i-1}) > 0$  saadaan kaksoisepäytälö

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \leq (x_i - x_{i-1}) \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(p_i, y) dy \leq M_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Summaamalla sitten nämä kaksoisepäytälöt yli indeksien  $i = 1, 2, \dots, k$  ja  $j = 1, 2, \dots, l$  saadaan

$$A(f, \mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^k F(p_i)(x_i - x_{i-1}) \leq Y(f, \mathcal{P}).$$

Nyt voidaan päätellä, että

$$A(f, \mathcal{P}) \leq A(f, \pi) \leq Y(f, \pi) \leq Y(f, \mathcal{P}).$$

Näin ollen  $F$  on integroituva yli välin  $[a, b]$  ja

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_Q f(x, y) dx dy. \quad \square$$

Koska edellinen päättely voidaan suorittaa myös toisessa järjestyksessä, niin saadaan seuraava lause.

**Lause 5.8** (Fubinin lause). *Olkoon  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio, joka on integroituva suorakulmiossa  $Q = [a, b] \times [c, d]$ . Jos  $f(x, y)$  on integroituva  $x$ :n funktiona jokaisella  $y \in [c, d]$  ja  $y$ :n funktiona jokaisella  $x \in [a, b]$ , niin*

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

*Huomautus 5.9.* Fubinin lause on voimassa, jos  $f$  on jatkuva suorakulmiossa  $Q$ .

## 2. Nollajoukko

Olkoot  $x_0 < x_1 < \dots < x_k$  ja  $y_0 < y_1 < \dots < y_l$  kaksi äärellistä reaalilukujoukkoa. Nämä määrittelevät koko  $\mathbb{R}^2$ :n jaon  $\mathcal{P}$ , johon kuuluu  $(k+2)(l+2)$  kappaletta suorakulmioita, joista osa on rajoitettuja ja osa ei. Jaon hienonnus määritellään kuten aikaisemminkin.

**Määritelmä 5.10.** Olkoot  $A \subset \mathbb{R}^2$  osajoukko ja  $\mathcal{P}$  eräs avaruuden  $\mathbb{R}^2$  jako. Joukon  $A$  ja jaon  $\mathcal{P}$  kontaktijoukon muodostavat ne suorakulmiot, joiden leikkausjoukko  $A$ :n kanssa on epätyhjä. Tämän kontaktijoukon pinta-alalle käytetään merkintää  $k(A, \mathcal{P})$ .

Jos  $A \subset \mathbb{R}^2$  on rajoitettu osajoukko, niin löytyy aina jakoja  $\mathcal{P}$ , joille  $k(A, \mathcal{P}) < \infty$ .

**Määritelmä 5.11.** Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  osajoukko  $N$  on *nollajoukko* (null set), jos jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\mathbb{R}^2$ :n jako  $\mathcal{P}$ , että  $k(N, \mathcal{P}) < \varepsilon$ .

*Esimerkki.* Neliön  $[0, 1] \times [0, 1]$  reuna on nollajoukko.

**Lause 5.12.** Olkoon  $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio. Tällöin graafi  $\{(x, \psi(x)) : x \in [a, b]\}$  on nolla joukko.

TODISTUS. Olkoon  $\epsilon > 0$ . Koska  $\psi$  on tasaisesti jatkuva, voimme valita  $\delta > 0$  siten, että  $|\psi(x) - \psi(y)| < \epsilon$  aina kun  $|x - y| < \delta$ . Valitaan  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k = b$  joille  $x_{i+1} - x_i < \delta$ . Nyt käyrän osa  $\{(x, \psi(x)) : x \in [x_i, x_{i+1}]\}$  voidaan peittää suorakaiteella  $Q_i$ , jonka koko on  $\epsilon(x_{i+1} - x_i)$ . Nyt suorakaiteiden  $Q_i$  perhe peittää joukon  $\{(x, \psi(x)) : x \in [a, b]\}$ . Niiden yhteenlaskettu pinta-ala on  $\sum_i \epsilon(x_{i+1} - x_i) = \epsilon(b - a)$ , josta väite seuraa.  $\square$

**Lause 5.13.** Olkoon  $Q = [a, b] \times [c, d]$  rajoitettu suorakulmio ja  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio. Jos pistejoukko

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ on epäjatkua pisteessä } (x, y)\}$$

on nollajoukko, niin  $f$  on integroituva yli  $\mathbb{R}^2$ :n.

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivu 351 Theorem 7.2.12.  $\square$

**Lause 5.14.** Olkoon  $Q = [a, b] \times [c, d]$  rajoitettu suorakulmio ja  $N \subset Q$  nollajoukko.

- (1) Jos  $f : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitettu funktio, jolle  $f(\mathbf{p}) = 0$  jokaisella  $\mathbf{p} \in Q \setminus N$ , niin  $f$  on integroituva yli  $Q$ :n ja

$$\iint_Q f \, dA = 0.$$

- (2) Jos  $g : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on integroituva yli  $Q$ :n ja myös  $h : Q^2 \rightarrow \mathbb{R}$  on rajoitettu funktio, jolle  $h(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p})$  jokaisella  $\mathbf{p} \in Q \setminus N$ , niin  $h$  on integroituva yli  $Q$ :n ja

$$\iint_Q g \, dA = \iint_Q h \, dA.$$

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivu 352 Theorem 7.2.17.  $\square$

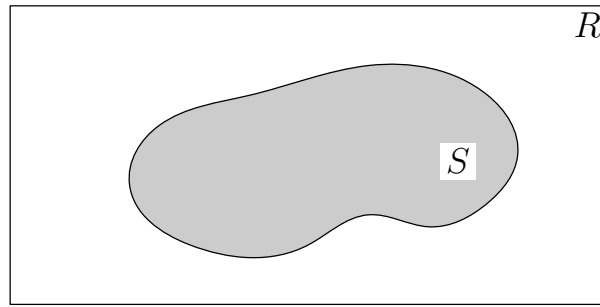
### 3. Funktion integraali yli $\mathbb{R}^2$ :n rajoitetun osajoukon

Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^2$  jokin rajoitettu osajoukko ja  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  funktio. Olkoon edelleen  $Q$  sellainen rajoitettu suorakulmio, että  $S \subset Q$ . Määritellään funktio  $f^*$  asettamalla

$$f^*(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \text{jos } \mathbf{p} \in S \\ 0, & \text{jos } \mathbf{p} \notin S \end{cases}.$$

**Määritelmä 5.15.** Jos  $f$ :n laajennus  $f^* : Q \rightarrow \mathbb{R}$  on integroituva yli  $Q$ :n, niin sanotaan että  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  on *integroituva yli osajoukon  $S$* . Tällöin määritellään

$$\iint_S f \, dA = \iint_Q f^* \, dA.$$



*Huomautus 5.16.* Integroituvuus ja integraalin arvo ovat riippumattomia suorakulmion  $Q$  valinnasta.

*Esimerkki.* Olkoot  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  ja  $f(x, y) = 1$  kaikilla  $(x, y) \in S$ . Laske  $f$ :n integraali yli joukon  $S$ .

**Määritelmä 5.17.** Jos  $S \subset \mathbb{R}^2$  on rajoitettu osajoukko, niin  $S$ :n pinta-ala on

$$A(S) = \iint_S 1 \, dA.$$

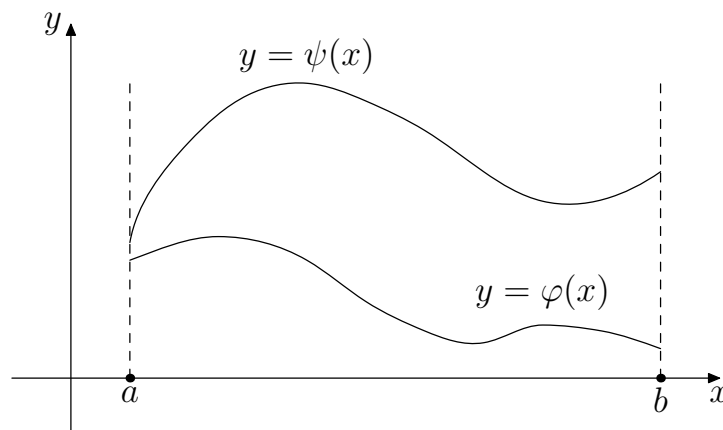
Seuraavaksi johdetaan menetelmiä integraalin  $\iint_S dA$  laskemiseksi eräissä erikoistapauksissa.

**Lause 5.18.** Olkoot  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvia funktioita, joille pätee  $\varphi(x) \leq \psi(x)$  kaikilla  $x \in ]a, b[$ , ja olkoon

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

jolle  $\partial S$  on suljettu yksinkertainen käyrä (nollajoukko). Jos  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin  $f$  on integroituva yli joukon  $S$  ja

$$\iint_S f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$



**TODISTUS.** Olkoon  $c = \min\{\varphi(x) \mid a \leq x \leq b\}$  ja  $d = \max\{\psi(x) \mid a \leq x \leq b\}$ . Siten  $S \subset [a, b] \times [c, d]$ . Koska  $\partial S$  on nollajoukko ja  $f$  on jatkuva, niin

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{jos } (x, y) \in S \\ 0, & \text{jos } (x, y) \notin S \end{cases}.$$

on integroituva yli  $Q$ :n. Nyt jokaiselle  $x$  pätee

$$f^*(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{kun } c \leq y < \varphi(x) \\ f(x, y), & \text{kun } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \\ 0, & \text{kun } \psi(x) < y \leq d \end{cases}.$$

Jokaisella  $x$  funktio  $f(x, y)$  on jatkuva  $y$ :n funktio, kun  $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ . Täten jokaisella  $x$   $f^*(x, y)$  on integroituva  $y$ :n funktio ja

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{\varphi(x)} 0 dy + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy + \int_{\psi(x)}^d 0 dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

Nyt saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) dy &= \iint_S f^*(x, y) dx dy \\ &= \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy dx \end{aligned}$$

ja todistus päättyy. □

*Huomautus 5.19.* Edellisessä lauseessa määriteltyä aluetta  $S$  sanotaan  $x$ -simppeleksi ( $x$ -simple). Vastaavalla tavalla määritellään  $y$ -simppeleksi alue. Lisäksi vastaava tulos pätee  $y$ -simppeleille alueelle.

**Lause 5.20.** Olkoot  $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvia funktioita, joille  $\varphi(y) \leq \psi(y)$  jokaisella  $y \in ]c, d[$  ja olkoon

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\},$$

jolle  $\partial S$  on suljettu yksinkertainen käyrä. Jos  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva, niin  $f$  on integroituva yli  $S$ :n ja

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx dy.$$

*Esimerkki.* Laske paraabelien  $y^2 = x + 3$  ja  $y^2 = -2x + 6$  rajoittaman tasoalueen pinta-ala

- (a)  $y$ -simppeleinä alueena.
- (b)  $x$ -simppeleinä alueena.

**Lause 5.21.** Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^2$  rajoitettu osajoukko ja  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettuja funktioita, jotka ovat integroituvia yli joukon  $S$ . Tällöin  $f + g$  ja  $kf$  ovat integroituvia yli  $S$ :n jokaisella  $k \in \mathbb{R}$  ja

$$\iint_S (f + g) dA = \iint_S f dA + \iint_S g dA \quad \text{ja} \quad \iint_S (kf) dA = k \iint_S f dA.$$

TODISTUS. Lause seuraa määritelmästä 5.15 ja lauseesta 5.4. □

**Lause 5.22.** Olkoot  $f, g : S \rightarrow \mathbb{R}$  integroituvia yli  $S \subset \mathbb{R}^2$ :n ja olkoon  $f(x, y) \leq g(x, y)$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Tällöin

$$\iint_S f dA \leq \iint_S g dA.$$

TODISTUS. Koska  $h(x, y) = g(x, y) - f(x, y) \geq 0$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , niin  $\iint_S h(x, y) dx dy \geq 0$ . Väite seuraa kaksinkertaisen integraalin lineaarisuudesta. □

**Lause 5.23** (Integraalilaskennan väliarvolause). *Olkoon  $S \subset \mathbb{R}^2$  kompakti osajoukko, jolle  $\partial S$  on avaruuden  $\mathbb{R}^2$  nollajoukko ja olkoon  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio. Jos  $m = \min_S f(x, y)$  ja  $M = \max_S f(x, y)$ , niin*

$$mA(S) \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq MA(S).$$

*Jos  $S$  on lisäksi polkuyhtenäinen, niin on olemassa sellainen piste  $(a, b) \in S$ , että*

$$\iint_S f(x, y) dx dy = f(a, b)A(S).$$

TODISTUS. Koska  $m \leq f(x, y) \leq M$  jokaisella  $(x, y) \in S$ , niin edellisen lauseen nojalla

$$\iint_S m dA \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq \iint_S M dA$$

eli

$$m \iint_S dA \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq M \iint_S dA$$

eli

$$mA(S) \leq \iint_S f(x, y) dx dy \leq MA(S).$$

Osoitetaan jälkimmäinen väite. Olkoon  $S$  siis lisäksi polkuyhtenäinen, jolloin  $f$  saa kaikki arvot  $m$ :n ja  $M$ :n väliltä. Todistuksen alkuosan nojalla

$$m \leq \frac{1}{A(S)} \iint_S f dA \leq M,$$

joten on olemassa sellainen  $(a, b) \in S$ , että

$$f(a, b) = \frac{1}{A(S)} \iint_S f dA,$$

mistä väite seuraa. □

**Lause 5.24.** *Olkoot  $S$  ja  $T$  rajoitettuja osajoukkoja, joille  $S \cap T = \emptyset$  ja olkoon  $f : S \cup T \rightarrow \mathbb{R}$  rajoitettu funktio. Jos  $f$  on integroituva sekä yli joukon  $S$  että yli joukon  $T$ , niin  $f$  on integroituva yli joukon  $S \cup T$  ja*

$$\iint_{S \cup T} f dA = \iint_S f dA + \iint_T f dA.$$

TODISTUS. Olkoon  $Q$  suorakulmio, jolle  $S \cup T \subset Q$ , ja olkoot

$$f_S(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in S \\ 0, & \mathbf{p} \in Q \setminus S \end{cases}, \quad f_T(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in T \\ 0, & \mathbf{p} \in Q \setminus T \end{cases}$$

ja

$$f_{S \cup T}(\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{p}), & \mathbf{p} \in S \cup T \\ 0, & \mathbf{p} \in Q \setminus (S \cup T) \end{cases}.$$

Havaitaan, että  $f_{S \cup T} = f_S + f_T$ , mistä päätellään, että

$$\begin{aligned} \iint_Q f dA &= \iint_Q f_{S \cup T} dA = \iint_Q (f_S + f_T) dA \\ &= \iint_Q f_S dA + \iint_Q f_T dA = \iint_S f dA + \iint_T f dA. \end{aligned} \quad \square$$

## 4. Muuttujan vaihto kaksinkertaisessa integraalissa

Kurssissa matematiikan perusmetodit 1 todistettiin, että

$$\int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t) dt = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} f(s) ds,$$

missä  $\alpha$  on aidosti monotoninen ja jatkuvasti differentioituva. Jos yksinkertaisessa integraalissa merkitään

$$\int_a^b g = \int_I g$$

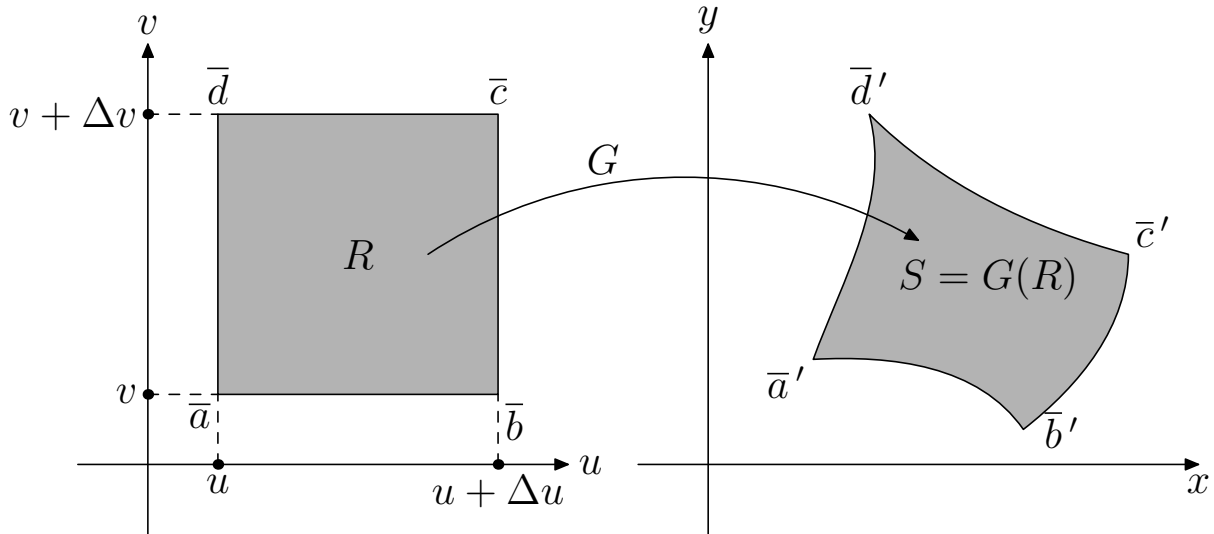
aina, kun  $a < b$  ja  $I = [a, b]$ , saadaan kaava muotoon

$$\int_I f(\alpha(t))|\alpha'(t)| dt = \int_{\alpha(I)} f(s) ds.$$

Tässä termi  $|\alpha'(t)|$  kuvaa muunnoksen  $s = \alpha(t)$  ”suurennusta” suljetulla välillä  $[t, t + \Delta t]$ .

$$|\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)| = |\alpha'(p)| |\Delta t|.$$

Sama ilmiö havaitaan kaksinkertaisessa integraalissakin. Kun suorakulmion  $Q$  pinta-ala on  $\Delta u \Delta v$ , niin tasoalueen  $S = G(Q)$  pinta-ala on ”likimäärin” sen suunnikkaan pinta-ala, minkä virittävät vektorit  $\mathbf{b}' - \mathbf{a}'$  ja  $\mathbf{d}' - \mathbf{a}'$ .



Toisaalta

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{b}' - \mathbf{a}'}{\Delta u} &= \frac{G(u + \Delta u, v) - G(u, v)}{\Delta u} \\ &= \left( \frac{g_1(u + \Delta u, v) - g_1(u, v)}{\Delta u}, \frac{g_2(u + \Delta u, v) - g_2(u, v)}{\Delta u} \right) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}' - \mathbf{a}'}{\Delta v} &= \frac{G(u, v + \Delta v) - G(u, v)}{\Delta v} \\ &= \left( \frac{g_1(u, v + \Delta v) - g_1(u, v)}{\Delta v}, \frac{g_2(u, v + \Delta v) - g_2(u, v)}{\Delta v} \right), \end{aligned}$$

joten saadaan approksimaatiot

$$\mathbf{b}' - \mathbf{a}' \approx (\partial_1 g_1(u, v) \Delta u, \partial_1 g_2(u, v) \Delta u)$$

ja

$$\mathbf{d}' - \mathbf{a}' \approx (\partial_2 g_1(u, v) \Delta v, \partial_2 g_2(u, v) \Delta v).$$

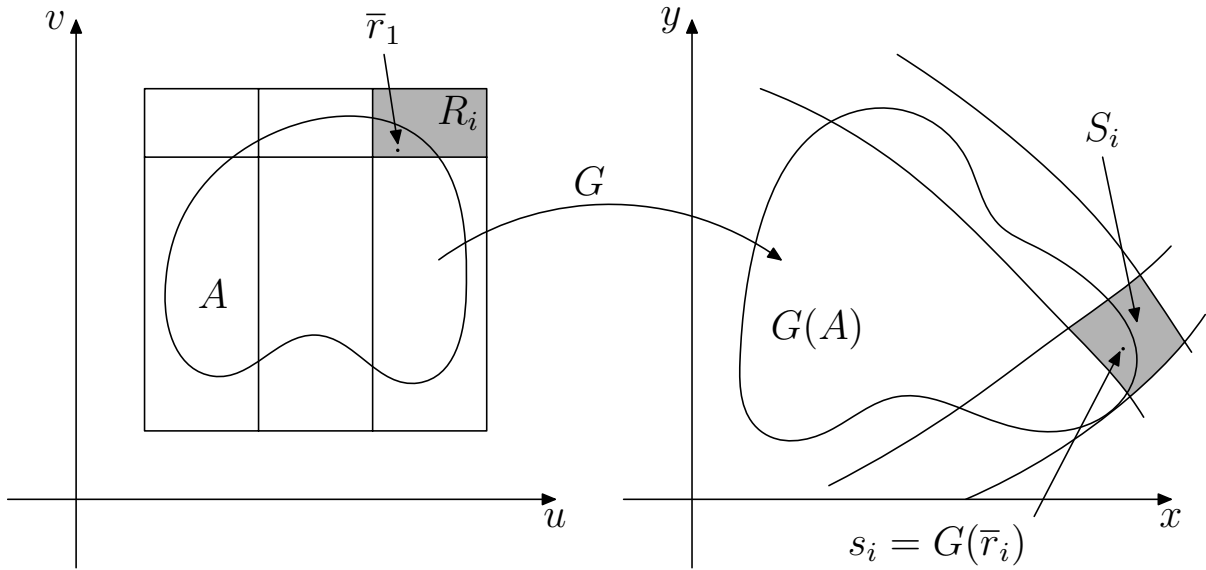
Vektorigeometriasta muistamme, että avaruuden  $\mathbb{R}^3$  vektoreiden  $\mathbf{p}$  ja  $\mathbf{q}$  virittämän suunnikkaan pinta-ala saadaan laskemalla  $|\mathbf{p} \times \mathbf{q}|$ . Merkitään  $\mathbf{p} = (a_1, a_2, 0)$  ja  $\mathbf{q} = (b_1, b_2, 0)$ . Tason  $\mathbb{R}^2$  vektoreiden virittämän suunnikkaan pinta-alaksi saadaan siis

$$|\mathbf{p} \times \mathbf{q}| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Soveltamalla tätä tulosta saadaan  $S$ :n pinta-alalle approksimaatio

$$A(S) \approx \begin{vmatrix} \partial_1 g_1(u, v) & \partial_1 g_2(u, v) \\ \partial_2 g_1(u, v) & \partial_2 g_2(u, v) \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = |\det \mathcal{J}_{G(u,v)}| \Delta u \Delta v,$$

missä  $\mathcal{J}_G$  on  $G$ :n Jacobin matriisi. Olkoon nyt  $A \subset \mathbb{R}^2$   $uv$ -tason rajoitettu alue ja  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  koordinaattimuunnos  $(x, y) = G(u, v)$  eli  $x = g_1(u, v)$  ja  $y = g_2(u, v)$ . Tällöin  $uv$ -tason alue  $A$  kuvautuu  $xy$ -tason alueeksi  $G(A)$ . Oletetaan, että  $G$  on bijektiivinen ja että  $G$  ja  $G'$  ovat  $C^1$ -funktioita. Olkoon  $\mathcal{P}$  jokin jako  $\{Q_i\}_{i=1}^n$  ja olkoon  $Q_i$  jokin jakoon  $\mathcal{P}$  kuuluva kompakti suorakulmio, jolle  $Q_i \cap A \neq \emptyset$ . Valitaan  $\mathbf{r}_i \in Q_i \cap A$  ja merkitään  $\mathbf{s}_i = G(\mathbf{r}_i)$ ,  $S_i = G(Q_i)$ .



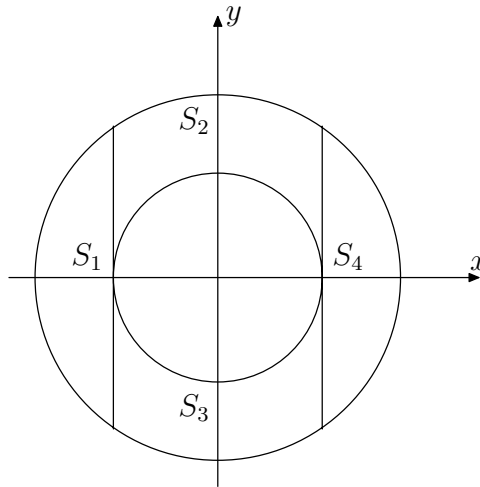
Tällöin

$$\begin{aligned} \iint_{G(A)} f(x, y) dx dy &\approx \sum_{i=1}^n f(\mathbf{s}_i) A(S_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^n f(G(\mathbf{r}_i)) |\det \mathcal{J}_{G(\mathbf{r}_i)}| A(Q_i) \\ &\approx \iint_A f(G(u, v)) |\det \mathcal{J}_{G(u,v)}| du dv. \end{aligned}$$

Tämä heuristinen päättely antaa viitteen siitä, että seuraava lause on tosi.

**Lause 5.25.** Olkoon  $K \subset \mathbb{R}^2$  kompakti osajoukko,  $G : K \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^1$ -funktio ja olkoon  $D \subset K$  avoin osajoukko. Oletetaan, että  $D$ ,  $K$  ja  $G$  toteuttavat seuraavat ehdot:

- (1)  $K \setminus D$  on tason nollajoukko,
- (2)  $G$  on injektio joukossa  $D$ ,



(3)  $\det \mathcal{J}_{G(u,v)} \neq 0$  kaikilla  $(u, v) \in D$ .

Silloin, jos  $f : G(K) \rightarrow \mathbb{R}^2$  on jatkuva joukossa  $G(D)$ , niin

$$\iint_{G(K)} f(x, y) dx dy = \iint_K f(G(u, v)) |\det \mathcal{J}_{G(u,v)}| du dv.$$

*Esimerkki.* Olkoon  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Laske  $\iint_S x^2 y^2 dx dy$ .

*Ratkaisu 1.* Jaetaan  $S$  parittain erillisiin  $x$ -simplpeleihin alueisiin tai parittain erillisiin  $y$ -simplpeleihin alueisiin ja integroidaan  $f$  niiden yli. Funktion  $f$  integraali yli joukon  $S$  saadaan tällöin “osa-integraalien” summana (ks. kuva).

*Ratkaisu 2.* Siirrytään napakoordinaatteihin. Siis

$$(x, y) = G(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

Jos  $K = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , niin  $S = G(K)$ . Valitaan  $D = ]1, 2[ \times ]0, 2\pi[$ . Selvästi  $K \setminus D$  on nollajoukko,  $G$  injektio  $D$ :ssä ja  $D \subset K$ . Nyt

$$\mathcal{J}_{G(r,\varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ja  $|\det \mathcal{J}_{G(r,\varphi)}| = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r > 0$  kaikilla  $(r, \varphi) \in D$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 y^2 dx dy &= \iint_K (r^2 \cos^2 \varphi)(r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi \\ &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^5 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi dr \\ &= \frac{\pi}{4} \int_1^2 r^5 dr = \frac{21}{8} \pi. \end{aligned}$$

**Huomioita käänteisfunktioista.** Integraalin muuttujavaihdossa joudumme tilanteeseen, jossa on usein hyödyllistä tietää kuvauksen  $\Phi$  ja sen käänteiskuvauksen  $\Phi^{-1}$  välisen yhteyden. Tämä yhteys esitetään tässä kappaleessa.

Olkoot  $U$  ja  $V$  joukkoja ja  $f : U \rightarrow V$  injektio. Tällöin  $f$ :llä on käänteisfunktio  $f^{-1} : V \supset f(U) \rightarrow U$ , joka määritellään asettamalla

$$f^{-1}(f(u)) = u \quad \text{kaikilla } v = f(u) \in f(U).$$

Siis  $f^{-1} \circ f = I : U \rightarrow U$  ja  $f \circ f^{-1} = I : f(U) \rightarrow f(U)$ .

Palauta mieleen: Jos  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}$ , on jatkuvasti differentioituva ja  $f'(a) \neq 0$  jollain  $a \in D$ , niin on olemassa sellainen avoin väli  $I \subset D$ , että  $a \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  on injektio,  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  on differentioituva ja

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

jokaisella  $x \in I$ .

**Määritelmä 5.26.** Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Sanotaan, että  $F$  on *paikallisesti injektiivinen* (locally injective) pisteessä  $\mathbf{a}$ , jos on olemassa sellainen avoin joukko  $N \subset D^n$ , että  $\mathbf{a} \in N$  ja  $F|_N : N \rightarrow F(N)$  on injektio. Lisäksi kuvauksen  $F$  sanotaan olevan *paikallisesti kääntyvä* eli *paikallisesti inverttiibeli* (locally invertible) pisteessä  $\mathbf{a}$  ja kuvauksen  $F|_N$  käänteisfunktioita merkitään symbolilla  $F^{-1}$ .

Olkoon  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lineaarinen kuvaus. Tällöin  $A$  on injektio täsmälleen silloin, kun sen determinantti on nollasta eriävä. Lisäksi tiedetään, että  $A$  on bijektio täsmälleen silloin, kun se on injektio (koska  $A$  on lineaarinen). Jo aikaisemmin nähtiin, että  $A$ :n differentiaali on  $A$ :n Jacobin matriisi  $\mathcal{J}_{A,\mathbf{x}}$ , joka on sama kuin  $A$ :n matriisi luonnollisen kannan suhteen.

Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  differentioituva pisteessä  $\mathbf{a} \in D^n$ . Siis

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - F(\mathbf{a}) = L_{F,\mathbf{a}}\mathbf{h} + |\mathbf{h}|\rho(\mathbf{h}),$$

missä  $|\rho(\mathbf{h})| \rightarrow 0$ , kun  $|\mathbf{h}| \rightarrow 0$ , ja  $L_{F,\mathbf{a}}$  on lineaarinen kuvaus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Siis lauseke  $F(\mathbf{a}) + L_{F,\mathbf{a}}\mathbf{h}$  approksimoi hyvin funktiota  $F$  pisteen  $\mathbf{a}$  ympäristössä. Näin ollen on helppo uskoa seuraava niin sanottu ”inverse function theorem”.

**Lause 5.27** (Inverse function theorem). *Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvasti differentioituva funktio,  $\mathbf{a} \in D^n$  ja  $\det \mathcal{J}_{F,\mathbf{a}} \neq 0$ . Tällöin*

- (1) *on olemassa sellaiset avoimet joukot  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , että  $\mathbf{a} \in U \subset D^n$ ,  $F(U) = V$  ja  $F : U \rightarrow V$  on injektio.*
- (2)  *$F$  on paikallisesti kääntyvä pisteessä  $\mathbf{a}$  ja  $F^{-1} : V \rightarrow U$  on jatkuvasti differentioituva.*
- (3)  *$\mathcal{J}_{F^{-1},F(\mathbf{a})}\mathcal{J}_{F,\mathbf{a}} = I$  eli  $\mathcal{J}_{F^{-1},F(\mathbf{a})} = \mathcal{J}_{F,\mathbf{a}}^{-1}$*

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivu 217. □

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Tutki  $F$ :n käänteisfunktion sekä globaalia että lokaalia olemassaoloa.

*Ratkaisu.* Nyt  $F$  ei ole globaali injektio, sillä esimerkiksi  $F(0, 0) = F(0, k2\pi) = (1, 0)$  kaikilla  $k \in \mathbb{Z}$ . Tutkitaan  $F$ :n paikallista kääntyvyyttä. Merkitään  $\mathbf{p} = (x, y)$ .  $F$ :n Jacobin matriisi pisteessä  $\mathbf{p}$  on

$$\mathcal{J}_{F,\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}.$$

Nyt

$$\det \mathcal{J}_{F,\mathbf{p}} = e^{2x} \cos^2 y + e^{2x} \sin^2 y = e^{2x} > 0.$$

jokaisella  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ . Näin ollen  $F$  on paikallisesti kääntyvä jokaisessa  $\mathbb{R}^2$ :n pisteessä.

Tutkitaan  $F$ :ää joukossa  $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -\pi/2 < y < \pi/2\}$ . Merkitään  $u = e^x \cos y$  ja  $v = e^x \sin y$ . Tällöin

$$u^2 + v^2 = e^{2x} \iff x = \ln(\sqrt{u^2 + v^2})$$

ja

$$\frac{v}{u} = \tan y \iff y = \arctan \frac{v}{u}.$$

Näin ollen  $F$  on injektio joukossa  $A$  ja

$$F^{-1}(u, v) = \left( \log(\sqrt{u^2 + v^2}), \arctan \frac{v}{u} \right)$$

kaikilla  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ , joille  $u > 0$  ja  $\frac{1}{e} < \sqrt{u^2 + v^2} < e$ .

Nyt  $(0, 0) \in A$ ,  $F(0, 0) = (1, 0)$  ja

$$\mathcal{J}_{F,(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

joten

$$\mathcal{J}_{F^{-1},(1,0)} = \mathcal{J}_{F,(0,0)}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## Polkuintegraali ja kaari-integraali

### 1. Reaalifunktion polkuintegraali

Kertaa Riemannin summa ja integraali sekä käsitteet polku, käyrä ja yksinkertainen kaari.

Olkoon  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva funktio. Siis  $F$  on polku pisteestä  $F(a)$  pisteeseen  $F(b)$ . Jos  $F$  on  $C^1$ -polku, niin tämän polun pituudelle johdettiin kaava

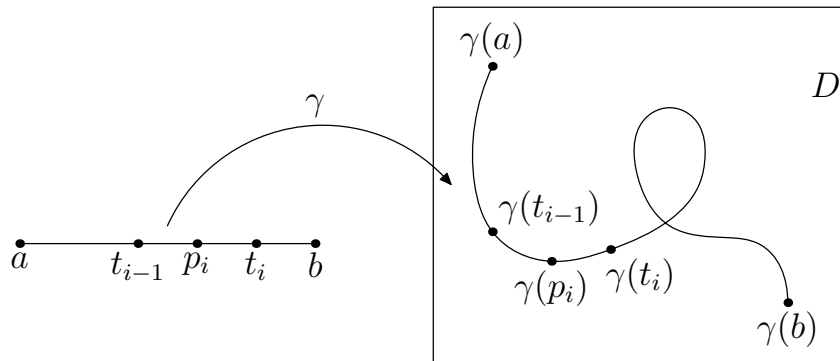
$$l(F) = \int_a^b |F'(t)| dt = \int_a^b (|f'_1(t)|^2 + \dots + |f'_n(t)|^2)^{1/2} dt,$$

missä  $F(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ . Vastaava polun pituusfunktio on

$$\lambda(t) = \int_a^t |F'(u)| du, \quad a \leq t \leq b.$$

Jatkossa polkuja merkitään pienillä kreikkalaisilla kirjaimilla, esimerkiksi  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Jotkut käytännön ongelmat johtavat tarkastelemaan annetun funktion  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrointia pitkin annettua polkua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , joka toteuttaa ehdon  $\gamma([a, b]) \subset D$ .



*Esimerkki.* Kala ui vedessä pitkin polkua  $\gamma$  kita auki keräten ravintoa, jonka tiheysjakaumaa vedessä kuvaa annettu funktio  $f(x, y, z)$ . Kuinka paljon ravintoa kala kerää?

Oletetaan, että  $f$  on rajoitettu funktio. Jos

$$P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_k = b\}$$

on välin  $[a, b]$  jako, niin polun  $\gamma$  pituus välillä  $\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)$  on  $\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})$ . Olkoon vielä  $p_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Merkitään

$$R_\gamma(f, P) = \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i))(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})),$$

missä  $p_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . Lukua  $R_\gamma(f, P)$  sanotaan funktion  $f$  ja jakoon  $P$  liittyväksi *Riemannin summaksi* pitkin polkua  $\gamma$ .

Merkitään

$$m_i = \inf\{f(\gamma(t)) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

ja

$$M_i = \sup\{f(\gamma(t)) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}.$$

Niin sanottu yläsumma määritellään kaavalla

$$\mathbf{R}_\gamma(f, P) = \sum_{i=1}^k M_i(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}))$$

ja alasumma kaavalla

$$\underline{\mathbf{R}}_\gamma(f, P) = \sum_{i=1}^k m_i(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})).$$

Selvästi  $\underline{\mathbf{R}}_\gamma(f, P) \leq R_\gamma(f, P) \leq \mathbf{R}_\gamma(f, P)$  kaikille jaoille  $P$ . Lisäksi voidaan todeta, että  $\underline{\mathbf{R}}_\gamma(f, P_1) \leq \mathbf{R}_\gamma(f, P_2)$  kaikilla jaoilla  $P_1$  ja  $P_2$ .

Merkitään

$$\int_\gamma f ds = \sup_P \underline{\mathbf{R}}_\gamma(f, P) \quad \text{ja} \quad \int_\gamma^- f ds = \inf_P \mathbf{R}_\gamma(f, P)$$

**Määritelmä 6.1.** Jos  $\int_\gamma f ds = \int_\gamma^- f ds$ , niin sanotaan, että  $f$  on Riemannin mielessä integroituva pitkin polkua  $\gamma$ , ja tätä yhteistä arvoa merkitään symbolilla

$$\int_\gamma f ds$$

ja kutsutaan  $f$ :n integraaliksi pitkin polkua  $\gamma$ .

**Lause 6.2.** Olkoon  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -polku ja  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, jolle  $\gamma([a, b]) \subset D^n$ . Jos yhdistetty funktio  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on integroituva, niin  $f$ :n integraali pitkin polkua  $\gamma$  on

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

TODISTUS. Olkoon  $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_k = b\}$  välin  $[a, b]$  jako. Nyt

$$R_\gamma(f, P) = \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i))(\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})),$$

missä  $p_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , on funktion  $f$  Riemannin summa jaon  $P$  suhteen pitkin polkua  $\gamma$ . Koska

$$\lambda(t) = \int_a^t |\gamma'(u)| du,$$

niin  $\lambda'(t) = |\gamma'(t)|$  kaikilla  $t \in ]a, b[$ . Väliarvolauseeseen nojalla on olemassa sellainen  $q_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , että

$$\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}) = \lambda'(q_i)(t_i - t_{i-1}) = |\gamma'(q_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

Täten

$$\begin{aligned} R_\gamma(f, P) &= \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i)) |\gamma'(q_i)| (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i)) |\gamma'(p_i)| (t_i - t_{i-1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i)) (|\gamma'(q_i)| - |\gamma'(p_i)|) (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Lauseke  $R_\gamma(g, P) := \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i)) |\gamma'(p_i)| (t_i - t_{i-1})$  on Riemannin summa yhtälöllä  $g(t) = f(\gamma(t)) |\gamma'(t)|$  määritellylle funktiolle. Oletuksen nojalla

$$R_\gamma(g, P) \rightarrow \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

kun  $|P| = \max_{1 \leq i \leq k} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$  (miten tämä seuraa oletuksesta?). Lause on siis todistettu mikäli

$$r(P) := \sum_{i=1}^k f(\gamma(p_i)) (|\gamma'(q_i)| - |\gamma'(p_i)|) (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0,$$

kun  $|P| \rightarrow 0$ . Todistetaan tämä.

Koska  $|\gamma'|$  on jatkuva suljetulla välillä on se tasaisesti jatkuva sillä välillä eli jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että

$$||\gamma'(s_1)| - |\gamma'(s_2)|| < \varepsilon$$

aina, kun  $|s_1 - s_2| \leq \delta$  ja  $s_1, s_2 \in [a, b]$ . Olkoon nyt  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Valitaan jako  $P$  siten, että  $|P| \leq \delta$ . Tällöin

$$-\varepsilon < |\gamma'(q_i)| - |\gamma'(p_i)| < \varepsilon$$

jokaisella  $i = 1, 2, \dots, k$ . Jos nyt

$$M = \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))|,$$

niin

$$-M\varepsilon(b-a) < r(P) < M\varepsilon(b-a),$$

kun  $|P| < \delta$ . Koska  $\varepsilon > 0$  on mielivaltainen, väite seuraa.  $\square$

**Lause 6.3.** *Olkoot  $f$  ja  $g$  pitkin polkua  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  integroituvia funktioita  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $k \in \mathbb{R}$ . Tällöin*

$$\int_\gamma (f + g) ds = \int_\gamma f ds + \int_\gamma g ds \quad \text{ja} \quad \int_\gamma (kf) ds = k \int_\gamma f ds.$$

TODISTUS. Sivuuutetaan.  $\square$

*Huomautus 6.4.* Jos merkitään  $s = \lambda(t)$ , niin  $\frac{ds}{dt} = \lambda'(t) = |\gamma'(t)|$  ja siis

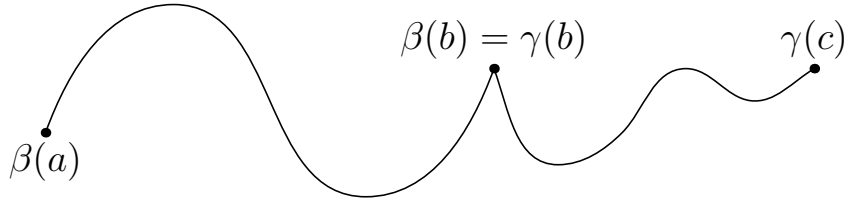
$$\int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b f ds.$$

*Esimerkki.* Laske skalaarikentän  $f(x, y) = x^2$  integraali pitkin polkua  $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ .

Jos annettu polku  $\gamma$  on paloittain  $C^1$ , voidaan funktion  $f$  polkuintegraali määritellä osaintegraalien summana.

$$\int_{\gamma} f ds = \sum_{i=1}^r \int_{C_{i-1}}^{C_i} f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

missä  $\gamma$  on  $C^1$ -polku kullakin osavälillä  $[C_{i-1}, C_i]$   $i = 1, 2, \dots, r$ .



*Esimerkki.* Olkoon  $\gamma(t) = (t, |t|)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Nyt  $\gamma$  on selvästi paloittain  $C^1$ -polku. Laske funktion  $f$ ,  $f(x, y) = x^2y$ , integraali pitkin polkua  $\gamma$ .

*Esimerkki.* Olkoot  $\gamma$  ja  $f$  kuten edellä. Nyt tehtävänä on laskea funktion  $f$  integraali edestakaisin pitkin polkua  $\gamma$ .

**Lause 6.5.** Olkoot  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  kaksi yksinkertaista paloittain  $C^1$ -polkua, joilla on sama kuvajoukko. Tällöin

- (a) poluilla  $\alpha$  ja  $\beta$  on sama pituus
- (b) jokaiselle jatkuvalle funktiolle  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pätee

$$\int_{\beta} f ds = \int_{\alpha} f ds.$$

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivu 277 Theorem 5.2.29. □

**Lause 6.6.** Olkoot  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ekvivalentteja  $C^1$ -polkuja, joilla on yhteisenä kuvajoukkona käyrä  $C$ . Tällöin jokaiselle jatkuvalle funktiolle  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  on voimassa yhtälö

$$\int_{\alpha} f ds = \int_{\beta} f ds,$$

kun  $C \subset D^n$ .

TODISTUS. Jos esimerkiksi  $\beta(u) = \alpha(\varphi(u))$ , missä  $\varphi'(t) > 0$  jokaisella  $t$  tai  $\varphi'(t) < 0$  jokaisella  $t$ , niin  $\beta'(t) = \alpha'(\varphi(t))\varphi'(t)$ . Näin ollen

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f ds &= \int_c^d f(\beta(u)) |\beta'(u)| du \\ &= \int_c^d f(\alpha(\varphi(u))) |\alpha'(\varphi(u))\varphi'(u)| du. \end{aligned}$$

Sijoittamalla  $t = \varphi(u)$  saadaan

$$\int_{\beta} f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt. \quad \square$$

## 2. Vektorikentän polkuintegraali

Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva funktio (vektorikenttä). Siis

$$F(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})),$$

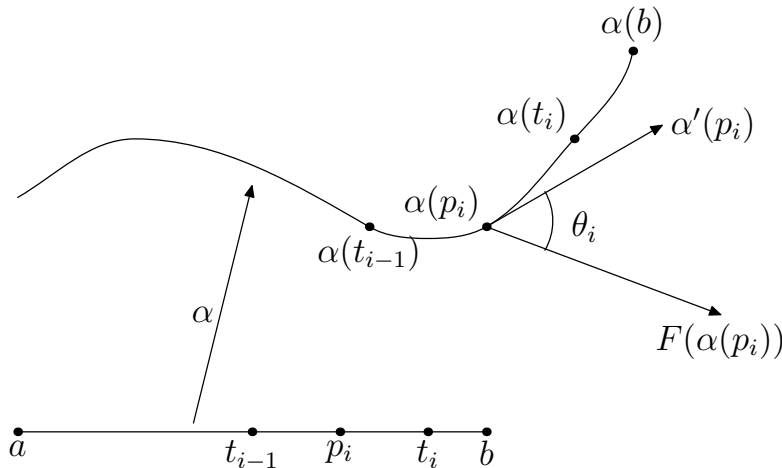
missä  $f_i : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  ovat jatkuvia funktioita jokaisella  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Esimerkki.*  $F(x, y) = \frac{1}{4}(-y, x)$  jokaisella  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Käydään ensiksi läpi esimerkki määriteltävän käsitteen fysikaalisesta motivaatiosta.

*Esimerkki.* Olkoon  $F : D^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  annettu voimakenttä ja olkoon  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  annettu polku, tietyn partikkelin rata ja  $\lambda(t) = \int_a^t |\alpha'(t)| dt$  on polunpituusfunktio. Väliarvolauseen nojalla nähdään, että partikkelin aikavälillä  $[t_{i-1}, t_i]$  kulkema matka on  $\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1}) = |\alpha'(p_i)|$  jollain  $p_i \in ]t_{i-1}, t_i[$ . Olkoon  $\theta_i$  vektoreiden  $F(\alpha(p_i))$  ja  $\alpha'(p_i)$  välinen kulma. Ajanhetkellä  $p_i$  partikkeliin vaikuttava voima on  $|F(\alpha(p_i))| \cos \theta_i$ , joten kentän tekemä työ (lyhyellä) aikavälillä  $[t_{i-1}, t_i]$  on keskimäärin

$$\begin{aligned} |F(\alpha(p_i))| \cos \theta_i (\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})) &= |F(\alpha(p_i))| \frac{F(\alpha(p_i)) \cdot \alpha'(p_i)}{|F(\alpha(p_i))| |\alpha'(p_i)|} |\alpha'(p_i)| \\ &= F(\alpha(p_i)) \cdot \alpha'(p_i). \end{aligned}$$



Koko työlle saadaan approksimaatio Riemannin summana

$$\sum_{i=1}^k |F(\alpha(p_i))| \cos \theta_i (\lambda(t_i) - \lambda(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^k F(\alpha(p_i)) \cdot \alpha'(p_i) (t_i - t_{i-1}),$$

missä  $p_i \in [t_i, t_{i-1}]$ . Jälleen päädytään Riemannin integraaliin Riemannin summan kautta.

**Määritelmä 6.7.** Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva funktio ja olkoon  $\alpha : [a, b] \rightarrow D^n$   $C^1$ -polku. Silloin  $F$ :n polkuintegraali (path integral) pitkin polkua  $\alpha$  on

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y) = \frac{1}{4}(-y, x)$  jokaisella  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ja  $\alpha(t) = (t, t^2)$ , kun  $-1 \leq t \leq 1$ . Laske vektorikentän  $F$  polkuintegraali pitkin polkua  $\alpha$ .

**Lause 6.8.** Olkoot  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva funktio,  $\alpha : [a, b] \rightarrow D^n$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow D^n$  kaksi  $C^1$ -polkua sekä  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  jatkuvasti differentioituva funktio, jolle  $\beta = \alpha \circ \varphi$ . Tällöin seuraavat virkkeet ovat tosia.

- (1) Jos  $\varphi(c) = a$  ja  $\varphi(d) = b$ , niin  $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = \int_{\beta} F \cdot d\beta$ .
- (2) Jos  $\varphi(c) = b$  ja  $\varphi(d) = a$ , niin  $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = - \int_{\beta} F \cdot d\beta$ .

TODISTUS. Olkoon  $\beta(u) = \alpha(\varphi(u))$ . Tällöin

$$\int_{\beta} F \cdot d\beta = \int_c^d F(\beta(u)) \cdot \beta'(u) du = \int_c^d F(\alpha(\varphi(u))) \cdot \alpha'(\varphi(u))\varphi'(u) du,$$

johon sijoittamalla  $t = \varphi(u)$  saadaan yhtälö

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt.$$

Toinen väite todistetaan vastaavalla tavalla. □

*Huomautus 6.9.* Olkoon  $F : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ja  $\alpha$  polku. Jos merkitään  $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$  ja  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , niin  $F$ :n polkuintegraali pitkin polkua  $\alpha$  voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} F \cdot d\alpha &= \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t) dt \\ &= \int P dx + \int Q dy. \end{aligned}$$

**Lause 6.10.** Olkoon  $F, G : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuvia vektorikenttiä,  $k \in \mathbb{R}$  ja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C^1$ -polku joukossa  $D^n$ . Tällöin

$$\int_{\alpha} (F + G) \cdot d\alpha = \int_{\alpha} F \cdot d\alpha + \int_{\alpha} G \cdot d\alpha \quad \text{ja} \quad \int_{\alpha} (kF) \cdot d\alpha = k \int_{\alpha} F \cdot d\alpha.$$

TODISTUS. Sivuuetaan. □

*Esimerkki.*  $F(x, y) = (x^2 + y^2, 1)$   $\alpha(t) = (t, |t|)$ ,  $-1 \leq t \leq 1$ . Laske  $F$ :n polkuintegraali pitkin polkua  $\alpha$ .

### 3. Integraalilaskennan peruslause

Analyyysi 1: Jos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuvasti differentioituva, niin

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a) \quad \text{ja} \quad f(x) = \int_a^x f'(t) dt + f(a), \quad a \leq x \leq b.$$

Usean muuttujan funktioille saadaan seuraava yleistys.

**Lause 6.11.** Olkoot  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvasti differentioituva ja  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$ . Jos  $D$ :ssä on olemassa sellainen  $C^1$ -polku  $\alpha : [a, b] \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  että  $\alpha(a) = \mathbf{p}$  ja  $\alpha(b) = \mathbf{q}$ , niin

$$\int_{\alpha} \text{grad } f \cdot d\alpha = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}).$$

TODISTUS. Oletusten nojalla yhdistetty funktio  $(f \circ \alpha) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on  $C^1$ -funktio, joten ketjusäännön nojalla

$$(f \circ \alpha)'(t) = \text{grad } f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Täten

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} \nabla f \cdot d\alpha &= \int_a^b \text{grad } f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t) dt \\ &= f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

□

*Huomautus 6.12.* Edellinen tulos pätee myös paloittain  $C^1$ -poluille  $\alpha$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $f$  määritelty kaavalla  $f(x, y) = xy + x^2$ . Laske funktion  $\text{grad } f$  integraali pitkin polkua  $\alpha$ , kun  $\alpha(t) = (t^2, t^4)$ ,  $-1 \leq t \leq 2$ , ja  $\alpha(-1) = (1, 1) = \mathbf{p}$  ja  $\alpha(2) = (4, 16) = \mathbf{q}$ .

**Lause 6.13.** Olkoon  $D \subset \mathbb{R}^n$  avoin ja  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä.

- (1) Jos  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat mitkä tahansa kaksi paloittain  $C^1$ -polkua  $D$ :ssä pisteestä  $\mathbf{p}$  pisteeseen  $\mathbf{q}$ , niin

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = \int_{\beta} F \cdot d\beta.$$

- (2) On olemassa sellainen  $C^1$ -funktio  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , että  $F = \text{grad } f$ .  
 (3) On olemassa sellainen  $C^1$ -funktio  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ , että kaikille pistepareille  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in D$  ja jokaiselle paloittain  $C^1$ -polulle  $\alpha$  pisteestä  $\mathbf{p}$  pisteeseen  $\mathbf{q}$  on voimassa

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = h(\mathbf{p}) - h(\mathbf{q}). \quad (h = -f)$$

- (4) Jokaiselle pisteelle  $\mathbf{p} \in D$  ja jokaiselle paloittain  $C^1$ -polulle  $\gamma$  pisteestä  $\mathbf{p}$  pisteeseen  $\mathbf{p}$  on voimassa

$$\int_{\gamma} F \cdot d\gamma = 0.$$

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivut 298-300. □

**Määritelmä 6.14.** Edellisen lauseen kohdan 3. funktioita  $h$  sanotaan funktion  $F$  potentiaalifunktioksi (potential function). Jatkuvaa vektorikenttää  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , millä on potentiaalifunktio, sanotaan konservatiiviseksi (conservative).

*Huomautus 6.15.* Tulos pätee myös paloittain  $C^1$ -polulle  $\alpha$ .

*Esimerkki.* Maan vetovoimakenttää kuvaa vektorikenttä  $F(x, y, z) = (0, 0, -mg)$ . Tutki kyseisen vektorikentän integraalia pitkin annettua polkua  $\alpha$ ,  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ .

*Esimerkki.* Olkoon  $F$  määritelty kaavalla  $F(x, y) = \frac{1}{4}(-y, x)$ , kun  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Tutki  $F$ :n konservatiivisuutta.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y, z) = (2xyz + z, x^2z + 1, x^2y + x)$ . Onko vektorikenttä  $F$  konservatiivinen?

#### 4. Kaari-integraali eli viivaintegraali

Edellä käsiteltiin annetun reaalifunktion  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  tai vektorikentän  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  integraalia pitkin  $C^1$ -polkua  $\alpha : [a, b] \rightarrow D^n \subset \mathbb{R}^n$ . Yleensä integraali riippuu polusta  $\alpha$  jopa silloinkin, kun poluilla on sama kuvajoukko. Palauta mieleen käyriin liittyvät käsitteet.

**Määritelmä 6.16.** Olkoon  $f : D^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva funktio ja olkoon  $C$  yksinkertainen kaari (simple arc) joukossa  $D^n$ . Tällöin  $f$ :n integraali yli kaaren  $C$  on

$$\int_C f ds := \int_\alpha f ds = \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt,$$

missä  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  on jokin  $C$ :n injektiivinen parametriesitys. Kyseistä integraalia sanotaan  $f$ :n kaari-integraaliksi (line integral) yli kaaren  $C$ .

*Huomautus 6.17.* Määritelmä on mielekäs, sillä

$$\int_\alpha f ds = \int_\beta f ds$$

aina, kun  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat  $C$ :n injektiivisiä parametriesityksiä. Vain injektiivisiä parametriesityksiä voidaan käyttää, sillä arvo voi muuttua, jos polku ”pyyhkäisee” osankin  $C$ :tä useaan kertaan.

*Esimerkki.* Olkoon  $f(x, y) = x^2 y$ . Laske  $f$ :n kaari-integraali yli kaaren  $C = \{(x, y) \mid y = |x|, -1 \leq x \leq 1\}$ .

**Määritelmä 6.18.** Olkoon  $C$  yksinkertainen kaari avaruudessa  $\mathbb{R}^n$  sekä  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$   $C$ :n parametriesityksiä. Sanotaan, että  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat *aidosti ekvivalentteja* (properly equivalent), jos on olemassa sellainen jatkuvasti differentioituva funktio  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ , että  $\beta(t) = \alpha(\varphi(t))$  ja  $\varphi'(u) > 0$  jokaisella  $u \in ]c, d[$ .

**Lause 6.19.** Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva vektorikenttä ja  $C$  yksinkertainen kaari joukossa  $D^n$ . Jos  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ja  $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ovat  $C$ :n aidosti ekvivalentteja parametriesityksiä, niin

$$\int_\alpha F \cdot d\alpha = \int_\beta F \cdot d\beta.$$

TODISTUS. Katso Baxandallin ja Liebeckin kirjan sivu 314 Theorem 6.1.3.  $\square$

Jos siis annetun yksinkertaisen kaaren  $C$  suunnistus on valittu, voidaan kaari-integraali määritellä sen suunnistusta vastaavan parametriesityksen antamana polkuintegraalina. Merkiksi siitä, että kaaren  $C$  suunnistus on kiinnitetty, merkitään sitä symbolilla  $C^+$ . Vastakkaiseen suuntaan suunnistettua kaarta merkitään siten symbolilla  $C^-$ .

**Määritelmä 6.20.** Olkoon  $F : D^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  jatkuva vektorikenttä ja  $C^+$  suunnistettu yksinkertainen kaari joukossa  $D$ . Tällöin  $F$ :n integraali pitkin kaarta  $C^+$  on

$$\int_{C^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_\alpha F \cdot d\alpha,$$

missä  $\alpha$  on jokin  $C^+$ :n injektiivinen parametriesitys.

*Esimerkki.* Olkoon  $F(x, y) = (xy, -x)$  jokaisella  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  ja  $C^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ , missä suunnistus on valittu pisteestä  $(-1, 1)$  pisteeseen  $(0, 0)$ . Laske

$$\int_{C^+} F \cdot d\mathbf{r}.$$

*Huomautus 6.21.* Vektorikentän ja reaalfunktion kaari-integraalien välillä on seuraava yhteys:

Olkoon  $C^+$  sileä yksinkertainen kaari ja  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sen jokin injektiivinen parametriesitys. Erityisesti  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$  jokaisella  $t \in [a, b]$ .  $C^+$ :n yksikkötangenttivektori  $T(\mathbf{r})$  pisteessä  $\mathbf{r}$  (unit tangent vector) määritellään asettamalla

$$T(\mathbf{r}) = \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|},$$

missä  $\alpha(t) = \mathbf{r}$ . Tiedetään, että jokainen  $\alpha$ :n kanssa ekvivalentti parametriesitys antaa saman yksikkötangenttivektorikentän  $T(\mathbf{r})$ . Jos nyt kuvaus  $F : \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$  on jatkuva vektorikenttä ja  $C^+ \subset D$ , niin

$$\int_{C^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_C (F \cdot T) ds.$$

TODISTUS.

$$\int_{C^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt = \int_a^b \underbrace{F(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}}_{F(\alpha(t)) \cdot T(\alpha(t))} |\alpha'(t)| dt = \int_C (F \cdot T) ds. \quad \square$$

*Esimerkki.* Olkoot  $P = (0, -1)$ ,  $Q = (1, -1)$  ja  $R = (1, 1)$ . Oletetaan, että suunnistettu polku  $C^+$  ”kulkee” pisteestä  $P$  suoraa viivaa pitkin pisteeseen  $Q$  ja sitten  $Q$ :sta suoraa viivaa pitkin pisteeseen  $R$ . Olkoon  $F(x, y) = \frac{1}{2}(-xy, y)$ . Laske

$$\int_{C^+} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Edellä johdetut yksinkertaista kaartia koskevat tulokset pätevät myös suljetuille yksinkertaisille käyrille.

**Määritelmä 6.22.** Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukko  $C$  on *suljettu yksinkertainen käyrä* (simple closed curve), jos on olemassa (paloittain)  $C^1$ -polku  $\alpha : [a, a+h] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , jonka kuvajoukko on  $C$  ja jolle  $\alpha(a) = \alpha(a+h)$  ja joka on injektiivinen välillä  $[a, a+h]$ . Polkua  $\alpha$  sanotaan  $C$ :n yksinkertaiseksi parametriesitykseksi kantapisteensä  $\alpha(a) \in C$ .

Nyt voidaan osoittaa, että reaalfunktion tai vektorikentän polkuintegraali ei riipu polusta (parametriesityksestä), kunhan vain polku on yksinkertainen ja sen kuvajoukko on suljettu yksinkertainen käyrä  $C$  ja muistetaan käyrän suunnistus vektorikentän tapauksessa.

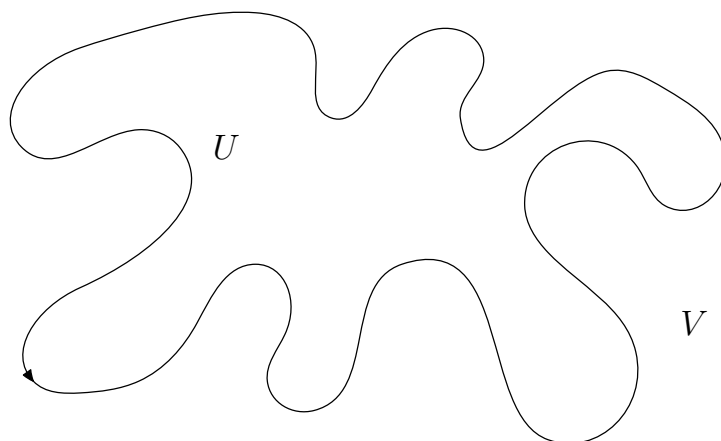
Usein merkitään

$$\oint_{C^+} F \cdot d\mathbf{r} \quad \oint_C f ds.$$

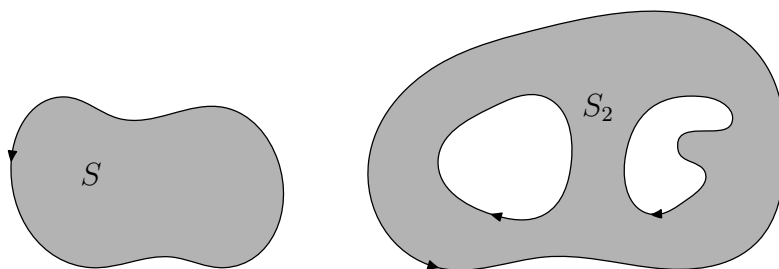
## 5. Greenin lause

Aikaisemmin määriteltiin annetun yksinkertaisen suljetun käyrän suunnistus valitun parametriesityksen avulla. Määritellään nyt suunnistus uudella tavalla, joka ei riipu parametriesityksestä. Tämän perustana on niin sanottu *Jordanin käyrälause*.

**Lause 6.23.** Jos  $C$  on yksinkertainen suljettu käyrä tasossa  $\mathbb{R}^2$ , niin joukko  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  on kahden erillisen joukon  $U$  ja  $V$  yhdiste eli  $\mathbb{R}^2 \setminus C = U \cup V$ , missä  $\partial U = \partial V = C$ ,  $U$  on rajoitettu komponentti (sisäpuoli) ja  $V$  on rajoittamaton komponentti (ulkopuoli).



**Määritelmä 6.24.** Olkoon  $C$  yksinkertainen suljettu käyrä tasossa  $\mathbb{R}^2$  ja olkoon  $U$  sen sisäpuolinen komponentti. Sitä  $C$ :n suunnistusta, jonka mukaan kuljettaessa pitkin käyrää  $C$  joukko  $U$  jää vasemmalle puolelle, sanotaan *positiiviseksi* ja merkitään symbolilla  $C^+$ . Päinvastainen suunnistus on *negatiivinen* ja sitä merkitään symbolilla  $C^-$ .



Tarkastellaan seuraavaksi tason osajoukkoja  $S$ , joiden reuna  $\partial S$  koostuu äärellisen monesta suljetusta yksinkertaisesta käyrästä. Olkoon siis  $C$  suljettu yksinkertainen käyrä tasossa  $\mathbb{R}^2$  ja olkoot  $A_1, A_2, \dots, A_k$  sellaisia erillisiä suljettuja käyriä  $C$ :n sisäpuolella, että ne ovat parittain toistensa ulkopuolella. Merkitään

$$D = \{ \text{pisteet } C\text{:n sisäpuolella ja } A_i\text{:n ulkopuolella jokaisella } i = 1, 2, \dots, k \}$$

ja

$$S = \mathbf{D} = D \cup C \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k.$$

Siis  $D$  on avoin ja  $S$  on suljettu ja rajoitettu. Sanotaan, että joukon  $S$  reuna  $\partial S = C \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  on *positiivisesti suunnistettu*, jos tämän suunnistuksen mukaan kuljettaessa joukko  $D$  jää aina vasemmalle puolelle. Siis itse asiassa  $C$ :n suunnistus on positiivinen ja kunkin  $A_i$ :n suunnistus on negatiivinen.  $\partial S$ :n positiivista suunnistusta merkitään symbolilla  $\partial S^+$ .

Greenin lauseen yleinen versio tason tapauksessa on nyt

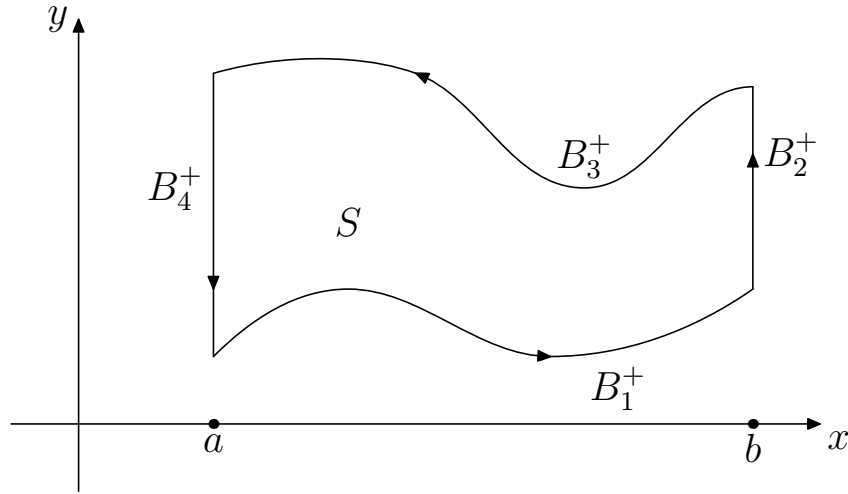
**Lause 6.25** (Greenin lause). *Olkoon  $S$  edellä mainittua tyyppiä oleva kompakti tasoalue ja olkoon  $F : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  jatkuvasti differentioituva vektorikenttä ja  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  jokaisella  $(x, y) \in S$ . Tällöin*

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\mathbf{x} = \iint_S \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

TODISTUS. Todistetaan lause eräissä erikoistapauksissa.

**A.** Oletetaan aluksi, että  $S$  on  $x$ -simppeleli eli

$$S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \}.$$



Olkoon  $\partial S^+ = B_1^+ \cup B_2^+ \cup B_3^+ \cup B_4^+$ . Jos  $F : \mathbb{R}^2 \supset S \rightarrow \mathbb{R}^2$  on jatkuva vektorikenttä, niin

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{B_1^+} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{B_2^+} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{B_3^+} F \cdot d\mathbf{r} + \int_{B_4^+} F \cdot d\mathbf{r}.$$

Oletamme aluksi, että  $F(x, y) = (f_1(x, y), 0)$  on jatkuvasti differentioituva. Jos  $\alpha : [s_1, s_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  on  $C^1$ -parametrisitys kaarelle  $B_1^+$ , niin määritelmän mukaan

$$\int_{B_1^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} (f_1(\alpha(t)), 0) \cdot \alpha'(t) dt = \int_{s_1}^{s_2} f_1(\alpha_1(t), \varphi(\alpha_1(t))) \alpha'(t) dt$$

Sijoittamalla  $x = \alpha_1(t)$  saadaan

$$\int_{B_1^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f_1(x, \varphi(x)) dx.$$

Vastaavalla tavalla nähdään, että

$$\int_{B_3^+} F \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b f_1(x, \psi(x)) dx.$$

Toisaalta  $(f_1(x, y), 0) \cdot (0, s) = 0$  jokaisella  $s \in \mathbb{R}$ , joten ilmeisesti

$$\int_{B_2^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{B_4^+} F \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Siis

$$\int_{\partial S^+} (f_1, 0) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b f_1(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b f_1(x, \psi(x)) dx.$$

Koska oletuksen nojalla  $\frac{\partial f_1}{\partial y}$  on jatkuva joukossa  $S$ , on

$$- \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) dy = \int_a^b (f_1(x, \varphi(x)) - f_1(x, \psi(x))) dx$$

ja siis  $x$ -simplille tasoalueelle ja vektorikentälle  $F = (f_1, 0)$  on voimassa

$$\int_{\partial S^+} (f_1, 0) \cdot d\mathbf{r} = - \iint_S \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy.$$

Siis tässä tapauksessa Greenin lause on voimassa.

**B.** Vastaavalla tavalla osoitetaan, että  $y$ -simplille tasoalueelle  $S$  ja vektorikentälle  $F = (0, f_2)$  on voimassa

$$\int_{\partial S^+} (0, f_2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy.$$

**C.** Oletetaan, nyt että  $S$  on sekä  $x$ -simpli ja  $y$ -simpli. Tällaista tasoaluetta kutsutaan *simpliksi*. Jos  $F : \mathbb{R}^2 \supset S \rightarrow \mathbb{R}^2$  on jatkuvasti differentioituva vektorikenttä, niin

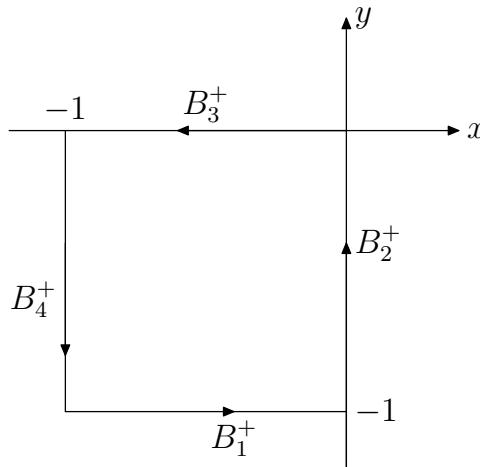
$$F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = (f_1(x, y), 0) + (0, f_2(x, y)),$$

joten A ja B kohtien nojalla saadaan

$$\begin{aligned} \int_{\partial S^+} F \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\partial S^+} (f_1, 0) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\partial S^+} (0, f_2) \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \iint_S \frac{\partial f_1}{\partial y} dx dy + \iint_S \frac{\partial f_2}{\partial x} dx dy \\ &= \iint_S \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad \square$$

*Esimerkki.*  $R = [-1, 0] \times [-1, 0]$  ja  $F(x, y) = (xy, 0)$ . Nyt

$$\iint_R \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy = \iint_R (-x) dx dy = \int_{-1}^0 dy \int_{-1}^0 (-x) dx = \frac{1}{2}.$$



Toisaalta  $B_1^+$ :  $\alpha(t) = (t - 1, -1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ja

$$\int_{B_1^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\alpha} F \cdot d\alpha = \int_0^1 (1 - t) dt = \frac{1}{2}.$$

$B_2^+$ :  $\beta(t) = (0, t - 1)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ja

$$\int_{B_2^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\beta} F \cdot d\beta = \int_0^1 0 dt = 0.$$

$B_3^+$ :  $\gamma(t) = (-t, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ja

$$\int_{B_3^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} F \cdot d\gamma = \int_0^1 0 dt = 0.$$

$B_4^+$ :  $\sigma(t) = (-1, -t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$  ja

$$\int_{B_4^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\sigma} F \cdot d\sigma = \int_0^1 t \cdot 0 dt = 0.$$

Siis myös  $\int_{\partial R^+} F \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}$ .

Greenin lauseen avulla voidaan laskea kompaktin simppelein alueen pinta-ala käyräintegraalin avulla.

**Seuraus 6.26.** Oletetaan, että  $S \subset \mathbb{R}^2$  kompakti simppelellä tasoaalue, ja olkoon  $\alpha : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  injektiivinen  $C^1$ -parametriesitys  $S$ :n reunalle  $\partial S^+$ ,  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ ,  $c \leq t \leq d$ . Tällöin  $S$ :n pinta-ala on

$$A(S) = \int_c^d x(t)y'(t) dt = - \int_c^d x'(t)y(t) dt = \frac{1}{2} \int_c^d (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

TODISTUS. Jos  $F(x, y) = (0, x)$ , niin  $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$  ja siis

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_S 1 dx dy = \int_S \left( \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{\partial S^+} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial S^+} (0, x) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_c^d (0, x(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) dt = \int_c^d x(t)y'(t) dt. \end{aligned}$$

Asettamalla  $F(x, y) = (-y, 0)$  saadaan vastaavasti

$$A(S) = \iint_S 1 dx dy = \int_{\partial S^+} (-y, 0) \cdot d\mathbf{r} = - \int_c^d y(t)x'(t) dt. \quad \square$$

*Esimerkki.* Ellipsin  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$  pinta-ala saadaan valitsemalla reunakäyrälle  $\partial S^+$  parametriesitys  $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$ , kun  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

$$A(S) = \int_0^{2\pi} a \cos t b \cos t dt = ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = ab\pi$$

ja

$$A(S) = - \int_0^{2\pi} (-a \sin t b \sin t) dt = ab \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = ab\pi$$

joten

$$A(S) = \frac{1}{2}ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{1}{2}ab2\pi = ab\pi.$$

## Hakemisto

- alue
  - x-simppeli, 55
- avoin
  - joukko, 7
- Cauchyn jono, 9
- derivaatta
  - vektoriarvoisen funktion, 27
- Differentioituvuus, 12
- funktio
  - vektoriarvoinen, 3
- gradientti, 31
- Hessin matriisi, 24
- implisiittisesti määritelty funktio, 37
- indefiniitti, 40
- injektiivinen
  - paikallisesti, 60
- integrointi
  - toistettu, 51
- integroituva
  - yli osajoukon, 53
  - yli suorakulmion, 50
- invertiibeli, 60
- Jacobin determinantti, 16
- Jacobin matriisi, 15
- jaon hienonnus
  - suorakaiteen, 49
- joukko
  - kompakti, 7
  - rajoitettu, 7
  - suljettu, 7
- joukon reuna, 6
- käyrä, 28
  - suljettu yksinkertainen, 71
- käyräyhtenäinen, 31
- kaaren pituus, 30
- kaari
  - yksinkertainen, 70
- kaari-integraali, 70
  - vektorikentän, 70
- kasautumispiste, 7
- konservatiivinen vektorikenttä, 69
- kontaktijoukko, 52
- koordinaattifunktio, 3
- kriittinen piste, 40
- Kroneckerin delta, 13
- kuvaaja, 4
- kuvaus
  - bijektio, 5
  - injektio, 5
  - jatkuva, 11
  - surjektio, 5
- Lagrangen kertojien menetelmä, 45
- maksimikohta
  - paikallinen, 39
- minimikohta
  - paikallinen, 39
- negatiivisesti definiitti, 40
- nollajoukko, 53
- osittaindifferentioituva, 14
- osittaisderivaatan kertaluku, 20
- osittaisderivaatta, 14
  - toisen kertaluvun, 20
- paikallinen maksimiarvo, 39
- paikallinen minimiarvo, 39
- pallo
  - avoin, 6
  - suljettu, 7
- pallon pinta, 7
- paloittain sileä, 29
- parametriesitys
  - ekvivalentit parametriesitykset, 28
  - käyrän, 28
  - kaaren
    - aidosti ekvivalentit, 70
- pisteen ympäristö, 6
- polku, 29
  - $C^1$ -polku, 29
  - sileä, 29
- polku integraali
  - vektorikentän, 67

- polun pituus, 29
- positiivisesti definiitti, 40
- potentiaalifunktio, 69
  
- raja-arvo, 7
- reunapiste, 6
- Riemannin summa
  - kaksinkertaisen integraalin, 49
  - pitkin polkua, 63
- ristitulo
  - kuvausten, 5
  
- sama-arvokäyrä, 3
- satulapiste, 40
- sekaderivaatta, 20
- sileä, 29
- sisäpiste, 6
- suppeneminen
  - pistejonon, 9
- suunnattu derivaatta, 32
- suunnistus
  - negatiivinen, 72
  - positiivinen, 72
  
- tangentti
  - kuvauksen, 27
- tangenttivektori
  - kuvauksen, 27
- tasa-arvokäyrä, 3
- Taylorin kehitelmä, 23
  - n:nen asteen, 25
- Taylorin polynomi
  - ensimmäisen asteen, 23
  - toisen asteen, 23
  
- vektorikenttä, 3
- virhe
  - maksimaalinen virhe, 36
- virheraja
  - tarkka, 36
  
- yksikkötangenttivektori
  - sileän yksinkertaisen kaaren, 71
- yksinkertainen kaari, 29

## Harjoitustehtäviä

1. Olkoot  $\bar{a} = (1, 2, 3)$  ja  $\bar{b} = (2, -1, 3)$ . Laske  $\bar{a} + 3\bar{b}$ ,  $\bar{a} \times 2\bar{b}$ ,  $(3\bar{a}) \cdot (\bar{a} + \bar{b})$  sekä vektorien  $2\bar{a}$  ja  $3\bar{b}$  välisen kulman kosini. Määrä jokin yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreita  $\bar{a}$  ja  $\bar{b}$  vastaan.

2. Esitä tasolla  $\mathbb{R}^2$ :n osajoukko

$$M = \{(x_1, x_2) | (16 - x_1^2)(9 - x_2^2) \geq 0\}.$$

Onko joukko suljettu tai rajoitettu?

3. Esitä tasolla  $\mathbb{R}^2$ :n osajoukko

$$A = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 4, \sqrt{4x - x^2} \leq y \leq \sqrt{4x}\}.$$

4. Olkoon  $M$  eräs  $\mathbb{R}^n$ :n osajoukko. Osoita, että

- a)  $M$  on avoin, jos ja vain jos  $\partial M \subset M^c$ .  
 b)  $M$  on suljettu, jos ja vain jos  $\partial M \subset M$ .

5. Olkoon  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | e^x \leq y \leq x^{100}, x \geq 0\}$ . Tutki, onko joukko  $M$  kompakti.

6. Tutki funktion  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  kuvajoukkoa ja injektiivisyyttä, kun

- a)  $F(x, y) = (2x, 4y, x + y - 2)$   
 b)  $F(x, y) = (\cos x, \sin x, y)$

7. Olkoot  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ja  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  määrittelty kaavoilla

$$F(x, y, z) = (x, xy, xyz)$$

ja

$$G(t) = (\sin t, t^2, t + t^3).$$

Määrä yhdistetty funktio  $F \circ G$ .

8. Olkoot  $F(x, y, z) = (xy, z, -x)$  ja  $G(x, y, z) = (2x, -z, y^2)$  funktioita  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Määrä funktiot  $F \cdot G$ ,  $F \times G$ ,  $F \circ G$  ja  $G \circ F$ .

9. Olkoon  $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$  yksikkövektori ja  $A = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^3 | |\bar{x} \cdot \bar{a}| < 1\}$ . Osoita, että  $A$  on avoin joukko. Anna joukolle  $A$  geometrinen tulkinta.

10. Tutki suppenemista jonoille  $(\bar{a}_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ , kun

- a)  $\bar{a}_k = (k \sin \frac{1}{k}, \frac{1}{k} \sin k)$   
 b)  $\bar{a}_k = ((-1)^k, \frac{1}{k})$ .

11. Määrä raja-arvot (mikäli olemassa):

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y} & \text{b)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x+xy)}{x} & \text{c)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ \text{d)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{e)} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y} & \end{array}$$

12. Olkoon  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  määritetty kaavalla

$$F(t) = \begin{cases} (t, 3t-2), & t \leq 1 \\ (2t-1, t+a), & t > 1 \end{cases}.$$

Osoita, että  $F$  on jatkuva vain jos  $a = 0$ .

13. Olkoon  $(\bar{a}_k)_{k=1}^\infty$  Cauchyn jono avaruudessa  $\mathbb{R}^p$ . Osoita, että jono suppenee.

14. Osoita, että seuraavat funktiot ovat jatkuvia:

- a)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(\bar{x}) = \bar{a} \cdot \bar{x}$  ( $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$  vakio vektori)  
 b)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(\bar{x}) = |\bar{x}|$   
 c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x, y) = x + y$ .

15. Olkoon  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  määritelty kaavalla

$$f(x, y) = \begin{cases} -\frac{1}{2}y + 2 & \text{kun } x \geq 0, y \geq 0, \\ 2 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Osoita, että

- a)  $f$  on jatkuva pisteessä  $(1, 0)$ ,  
 b)  $f$  on epäjatkuva pisteessä  $(0, 1)$ .  
 c) Piirrä kuvaaja.

16. Laske osittaisderivaatat  $\frac{\partial f}{\partial x}$  ja  $\frac{\partial f}{\partial y}$  kun

- a)  $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$   
 b)  $f(x, y) = xe^{x^2y}$   
 c)  $f(x, y) = x^2 \ln(y^2)$ .

17. Osoita määritelmään perustuen että  $f$  on differentioituva:

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  
 b)  $f(x, y, z) = x(y^2 + z)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

18. Osoita, että funktio  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ei ole differentioituva origossa:

- a)  $f(x, y) = \begin{cases} -|y| & , \text{jos } |y| \leq |x| \\ -|x| & , \text{jos } |x| < |y| \end{cases}$   
 b)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \text{jos } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{jos } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

19. Määrää tangenttitaso pinnalle  $z = f(x, y)$  pisteeseen  $(a, b, f(a, b))$  kun

- a)  $f(x, y) = x^2 - y$   
 b)  $f(x, y) = x + 3x^2$   
 c)  $f(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ .

20. Olkoon

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - 3x - 5y^2.$$

Tutki, saavuttaako  $f$  suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}.$$

21. Suorakulmaisen laatikon pohja on neliönmuotoinen. Pohjan sivun pituudeksi mitattiin 10 cm, tarkkuuden ollessa 0,1 cm. Korkeus on vastaavasti 20 cm samalla tarkkuudella. Laske laatikon tilavuus ja virherajat.

22. Olkoon  $G(t) = (\tan t, \cos^2 t) \forall t \in ] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Määrää ne käyrän  $G$  pisteet, joista etäisyys origoon on pienin. Mikä on tämä etäisyys?

23. Olkoon  $f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x}) \forall x \neq 0, y \in \mathbb{R}$  ja  $G(t) = (\cos t, \sin t) \forall t \in \mathbb{R}$ . Määrää  $h'(a)$ , kun  $h = f \circ G$  ja  $a \in \mathbb{R}$ .

24. Määrää osittaisdifferentiaaliyhtälön

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

pallosymmetriset ratkaisut  $u = u(x, y, z)$ .

25. Osoita, että  $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$ , kun  $f(x, y, z) = yz^3x^2$ .

26. Oletamme, että  $f(x, y)$  toteuttaa Laplacen yhtälön

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Osoita, että myös  $\phi(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$  toteuttaa Laplacen yhtälön  $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ .

27. Laske  $f$ :n suunnattu derivaatta pisteessä  $\bar{a}$  suuntaan  $\bar{v}$ , kun

- a)  $f(x, y, z) = x^2 - xy + z^2$ ,  $\bar{a} = (1, 2, 1)$ ,  $\bar{v} = (3, -1, 3)$   
 b)  $f(x, y) = e^x \sin y$ ,  $\bar{a} = (0, \frac{\pi}{6})$ ,  $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$ .

28. Määrää annetun pisteen kautta kulkeva pinnan tangenttitaso

- a)  $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ,  $(0, 1, 2)$   
 b)  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ ,  $(1, 1, 1)$ .  
 c)  $x^2 - y^2 - z^2 = 2$ ,  $(2, 1, 1)$ .

29. Olkoon

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & , \text{ kun } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ kun } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Määrää funktion  $f$  suunnattu derivaatta origossa vektorin  $\bar{v} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$  suuntaan.

30. Laske toisen kertaluvun osittaisderivaatat funktioille  $f(x, y) = e^x \sin y$  ja  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

31. Johda 2. asteen Taylorin polynomi funktiolle  $f(x, y)$  pisteessä  $(a, b)$ , kun

- a)  $f(x, y) = (x + y)^3$ ,  $(a, b) = (0, 0)$   
 b)  $f(x, y) = \sin(x + 3y)$ ,  $(a, b) = (0, 0)$   
 c)  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \sin y$ ,  $(a, b) = (1, 0)$

Tutki polynomin tarkkuutta pisteessä  $(a + h, b + k)$ , kun  $h = 0, 2$  ja  $k = -0, 1$ .

32. Olkoon  $g \in C^2(\mathbb{R})$  ja  $g'(1) = g''(1) = 1$ . Asetamme  $f(x, y) = xg(\frac{x}{y})$ ,  $y \neq 0$ . Laske  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1)$ .

33. Laske  $\partial_{\bar{v}} f$  ja  $\partial_{\bar{v}}^2 f$ , kun

- a)  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ,  $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $|\bar{v}| = 1$   
 b)  $f(x, y) = \sin(xy^2)$ ,  $\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ .

34. Määrää kriittiset pisteet ja niiden luonne seuraaville funktioille  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

a)  $f(x, y) = x^5 y + y^5 x + xy$       b)  $f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y)$

c)  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x$       d)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}, xy \neq 0$

e)  $f(x, y) = (x + y)^2 + x^4$       f)  $f(x, y) = (x + y)e^{-xy}$

g)  $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$       h)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$  (a monkey saddle).

35. Määrää kriittiset pisteet ja niiden laatu seuraaville funktioille  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$

b)  $f(x, y, z) = xy + xz$

c)  $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - z^2$ .

36. Määrää lyhin etäisyys origosta pinnalle  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 1\}$ .

37. Olkoon  $F(t) = (e^t, t, 1)$ ,  $G(t) = (0, -t, t^2 + 1)$  ja  $\phi(t) = t^3$ . Määrää

a)  $(F \cdot G)'$       b)  $(F \times G)'$       c)  $(\phi F)'$       d)  $(G \circ \phi)'$ .

38. Määrää nopeus- ja kiihtyvyyksvektorit sekä tangenttisuoran yhtälö:

a)  $F(t) = (6t, 3t, t^3)$ ,  $t = 0$

b)  $F(t) = (t + t^2, t - t^2)$ ,  $t = 1$

c)  $F(t) = (e^t, \cos t, \sin t)$ ,  $t = 0$ .

39. Oletamme, että partikkeli liikkuu polkua  $F(t) = (e^t, e^{-t})$ , kunnes se eroaa tangentin suuntaan hetkellä  $t = 1$ . Missä partikkeli on ajan hetkellä  $t = 2$ ?

40. Olkoon  $F(t) = (e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . ( $k > 0$  vakio). Osoita, että

$$\frac{F'(t) \cdot F(t)}{|F'(t)| |F(t)|} = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tulkitse tulos geometrisesti.

41. Määrää  $C^1$ -parametriesitys (jos mahdollista):

a)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3, x \in \mathbb{R}\}$

b)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y+2)^2 = x, 0 \leq x \leq 4\}$

c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| = x, -1 < y < 1\}$ .

42. Tutki, ovatko seuraavat  $\mathbb{R}^2$ :n osajoukot  $C$  käyriä. (Määrää  $C$ :lle  $C^1$ -parametriesitys).

a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \leq y \leq 2\}$

b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y + 1 = (x - 2)^2\}$ ,

c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3, 0 \leq x \leq 1\}$

d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = |y|\}$ .

43. Laske seuraavien kaarien pituudet

a)  $F(t) = (t, \cos t, \sin t)$ ,  $t \in [a, b]$       b)  $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ ,  $t \in [0, k]$ .

44. Piirrä yksinkertainen kaari  $C$ , jonka määrittelee yhtälö

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Osoita, että  $F(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , on  $C$ :n parametriesitys. Onko  $C$  sileä? Laske  $C$ :n kaaren pituus.

45. Määrää Jacobin matriisi  $\mathcal{J}_{F, \bar{a}}$  funktiolle  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kun

a)  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 + 2x_2, 2 \sin^2(x_1 x_2 x_3))$

- b)  $F(x_1, x_2, x_3) = ((x_2 + 1)^2, -\cos(2x_1x_2x_3))$
46. Määrä  $\mathcal{J}_{F,(r,\varphi,\theta)}$  ja sen determinantti, kun
- $$F(r, \varphi, \theta) = (r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi).$$
47. Olkoot  $F(x, y) = (x + y^2, x^2 - y)$  ja  $G(x, y) = (\sqrt{y - x}, x + y)$ .
- a) Laske  $dF(\bar{a}) = F'(\bar{a}) = L_{F,\bar{a}}$  ja  $dG(\bar{a})$ .
- b) Määrä  $H = F \circ G$  ja laske  $dH(0, 1)$  suoraan ja ketjusäännön avulla.
48. Olkoon  $F(x, y) = (y \sin x, x + y + 1)$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Osoita, että  $F$  on paikallisesti injektiivinen pisteessä  $(0, 1)$  ja määrä sen käänteisfunktion Jacobin matriisi pisteessä  $(0, 2)$ .
49. Olkoon  $F(x, y) = (x^3 + y^3, x^3 - y^3)$  kaikilla  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Laske  $\mathcal{J}_{F,\bar{0}}$ . Tutki onko  $F$ :llä käänteisfunktioita.
50. Piirrä yhtälön  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  ratkaisujoukko. Määrä arvoa  $x = \frac{2}{3}$  vastaavien pisteiden  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}(-2 + \sqrt{6}))$  ja  $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}(-2 - \sqrt{6}))$  kautta kulkevien ratkaisukäyrien tangenttien kulmakertoimet.
51. Määrä funktion  $f(x, y) = 3 + x - x^2 - y^2$  suurin ja pienin arvo
- a) neliössä  $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ ,
- b) alueessa  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 4\}$ .
52. Määrä funktion  $f(x, y) = x^2ye^{-x-y}$  suurin arvo joukossa  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, x \geq 0\}$ .
53. Olkoon  $f(x, y) = e^{x^2+y^2} - 3x - 5y^2$ . Tutki saavuttaako  $f$  suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ .
54. Määrä pinta-alaltaan suurin tasakylkinen kolmio, joka voidaan piirtää yksikköympyrän sisälle.
55. Määrä ne ellipsin  $4x^2 + y^2 - 4 = 0$  pisteet, joista etäisyys pisteeseen  $(2, 0)$  on suurin ja pienin.
56. Määrä funktion  $g(x, y, z) = x + y^2 + z$  ääriarvot pallopinnalla  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .
57. Määrä funktion  $g(x, y) = x^2 + y^2$  pienin ja suurin arvo ehdolla  $2x^2 + 3y^2 = 1$ . Tulkitse tulos geometrisesti.
58. Partikkeli liikkuu  $\mathbb{R}^3$ :ssa rataa  $F(t) = (t^2, t^3, \frac{1}{1+t^2})$ . Laske partikkelin nopeus, vauhti ja kiihtyvyyden ajanhetkellä  $t = 3$ .
59. Laske  $\nabla \times F$ , kun
- a)  $F(x, y, z) = (xy, yz, xz)$ ,
- b)  $F(x, y, z) = (x, y, z)$ ,
- c)  $F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z)$ .
60. Vektorikenttää  $F$ , jolle  $F = \text{grad } f$  jollakin funktiolla  $f : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , sanotaan *gradienttikentäksi*. Tutki mitkä edellisen tehtävän vektorikentistä ovat gradienttikenttiä.
61. Sanomme, että  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  on *harmoninen* funktio, jos  $\text{div grad } f = 0$ . Osoita, että seuraavat funktiot ovat harmonisia.

- a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ ,  
 b)  $f(x, y, z) = \frac{z}{r}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$ .

62. Olkoon  $F : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  eräs  $C^2$ -funktio. Osoita, että  $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ .
63. Määrä, mikäli mahdollista, kaikki sellaiset funktiot  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , että  $\text{grad} f = F$ , kun  $F(x, y, z) = (x + y, x + z \cos y, \sin y + z)$  kaikilla  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .
64. Osoita, että vektorikenttä  $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on pyörteetön ja määrä funktio  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle  $\text{grad} f = F$ .
65. Olkoon  $f(x, y) = x^2 y^2 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Laske polkuintegraali  $\int_{\alpha} f \, ds$  kun  
 a)  $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 4\pi$ ,  
 b)  $\alpha(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$ ,  $-2\pi \leq t \leq 0$ ,  
 c)  $\alpha(t) = (\cos t, -\sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
66. Olkoon  $f(x, y, z) = xy + z - 1 \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Laske polkuintegraali  $\int_{\gamma} f \, ds$ , kun  
 a)  $\gamma(t) = (-t, -t, -t)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$ .  
 b)  $\gamma(t) = (t^2, t^2, t^2)$ ,  $-1 \leq t \leq 0$   
 c)  $\gamma(t) = \begin{cases} (t^2, t^2, 1), & \text{kun } -1 \leq t \leq 0, \\ (0, 0, 1 - t^2), & \text{kun } 0 < t \leq 1 \end{cases}$ .
67. Olkoon  $\alpha(t) = (1 + t, 1 - t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ . Laske polkuintegraali  $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha$ , kun  
 a)  $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ ,  
 b)  $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$ ,  
 c)  $F(x, y, z) = (0, 0, xyz)$ .
68. Olkoon  $L$  origon kautta kulkeva suora tasossa  $\mathbb{R}^2$  ja olkoon  $\alpha$  jokin  $L$ :aan sisältyvä  $C^1$ -polku. Osoita, että  

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = 0, \quad \text{kun } F(x, y) = (y, -x).$$
69. Olkoon  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$   $C^1$ -polku, jolle  $\alpha(a) = \alpha(b)$ . Osoita, että  $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = 0$ , kun  $F(x, y) = (y, x)$ .
70. Olkoon  $F(x, y, z) = (y, yz, xyz)$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Laske kentän tekemä työ, kun partikkeli liikkuu origosta pisteeseen  $(1, 1, 1)$  pitkin polkua  $\alpha$ , missä  
 a)  $\alpha(t) = (t, t^2, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  
 b)  $\alpha(t) = (t^2, t, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ ,  
 c)  $\alpha(t) = (t, t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ .
71. Olkoon  $F(x, y, z) = (2xyz, x^2 z, x^2 y)$  kaikilla  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  ja olkoon  $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$   $C^1$ -polku, jolle  $\alpha(a) = (1, 1, 1)$  ja  $\alpha(b) = (-1, 2, 2)$ . Osoita, että  

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = 3.$$
72. Olkoon  $F(x, y) = (2xy + 3x^2, x^2)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
 a) Osoita, että  $F$  on konservatiivinen.  
 b) Laske  $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha$  kun  $\alpha$  on  $C^1$ -polku pisteestä  $(0, 1)$  pisteeseen  $(1, 0)$ .
73. Olkoon  $R = [-1, 2] \times [-1, 1]$ . Laske integraali  $\iint_R f(x, y) \, dx \, dy$ , kun a)  $f(x, y) = xy(x + y)$ ,  
 b)  $f(x, y) = x^2 \sin y$ , c)  $f(x, y) = |x + y|$ .

74. Määritä integroimisalue integraaleissa

$$\text{a) } \int_0^1 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad \text{b) } \int_{-1}^1 \int_0^{|x|} f(x, y) dy dx$$

ja laske integraalit, kun  $f(x, y) = xy^2$ .

75. Laske integraali  $\iint_S e^{y^2} dx dy$ , kun  $S$  on kolmio, jonka kärkipisteet ovat  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  ja  $(2,1)$ .

76. Laske integraali  $\iint_A xy dx dy$ , kun joukko  $A$  on tasoalue, jota rajoittavat suorat  $x = 0$ ,  $y = 0$  sekä käyrä  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ .

77. Olkoon  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ . Laske  $\iint_S f dA$ , kun a)  $f(x, y) = 1$ , b)  $f(x, y) = x^2 \quad \forall (x, y) \in S$ .

78. Parabolinen koordinaattimuunnos määritellään kaavalla  $x = u^2 - v^2$ ,  $y = 2uv$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .  
Olkoon  $K = [0, 2] \times [0, 2]$

a) Osoita, että muunnos  $(x, y) = G(u, v)$  on injektiivinen  $K$ :ssa

b) Määritä joukko  $S = G(K)$   $xy$ -tasossa.

c) Laske  $\iint_S 1 dx dy$  suoraan ja muunnosta käyttäen.

79. Laske  $\iint_S x dx dy$ , kun  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

80. Laske integraali  $\iint_{S(a)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , kun  $S(a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$  ja osoita, että  $\lim_{a \rightarrow \infty} \iint_{S(a)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$ .