

# Joustavuus matematiikassa

---

Tämä artikkeli perustuu *Joustavaan matematiikkaan* FB sivuilla julkaistuihin ”Matemaatikon mietteitä” kolumnin kirjoituksiin. Kiitän kaikkia kirjoituksia kommentoinneita.

Tarkennan aluksi, mitä tarkoitan joustavuudella.

*Joustava toiminta tarkoittaa, että on käytössä useampi toimintavaihtoehto, joista valitaan tilanteeseen sopivin.*

Kuten arkikielessä, joustavaa ei ole se, että toimii aina samalla tavalla tilanteesta riippumatta. Määritelmässä on mukana myös ”sopivin” -ulottuvuus, eli ei riitä, että toimii usealla tavalla, vaan valittu toimintatapa pitää olla tilanteessa järkevä. Huomaa, että se mikä on tilanteeseen sopivin voi riippua myös toimijasta.

Selkein esimerkki joustavuudesta matematiikassa on ns. *strateeginen joustavuus*: sama tehtävä voidaan ratkaista käyttäen useaa menetelmää, joista jokin on tehokkaampi (vaatii vähemmän vaivaa) kuin toinen. Esimerkiksi laskutehtävä  $432 + 99$  voidaan ratkaista perinteisesti allekkain laskulla, tai käyttämällä välivaihetta  $432 + 99 = 432 + 100 - 1$ , jonka jälkeen laskun laskee helposti päässä.

Tässä esimerkissä tulee jo esille monta joustavaan ratkaisuun liittyvää piirrettä: allekkain lasku on yleinen menetelmä, jolla voidaan ratkaista kaikki tämän tyyppiset laskut, kun taas toisessa ratkaisussa hyödynnetään käsillä olevan tehtävän erityispiirteitä. Vastaavasti, allekkain lasku vaatii monta (suoraviivaista) askelta tullakseen oikein suoritetuksi, kun taas vaihtoehtoinen ratkaisu on erittäin helppo laskea, kun sen on keksinyt.

Voidaan sanoa, että joustava ratkaisija on sopivasti laiska: hän käyttää aikaa sen miettimiseen, miten tehtävän voi ratkaista ilman liikaa mekaanista suorittamista. Ei-joustava ratkaisija puolestaan ryntää suin päin suorittamaan. Lyhyellä tähtäimellä ei-joustava ratkaisija voi suorittaa tehtävän nopeammin, mutta pitemmän päälle joustava ratkaisija on etulyöntiasemassa matemaattisen ajattelun kehittämisessä.

Joustavuus liittyy matematiikkaan myös muilla tavoin. Matemaattinen käsite voidaan ymmärtää/hahmottaa usealla tavalla. *Joustava representaation* käyttö tarkoittaa, että tietyissä tilanteissa käyttää tilanteeseen parhaiten sopivaa representaatiota. Esimerkiksi epäyhtälöä  $x^2 \geq 2x - 1$  voi lähestyä graafien kautta tai, tässä tapauksessa hyödyllisemmin, muuttujavaihdolla  $z = x - 1$ , jolloin epäyhtälö muuttuu muotoon  $z^2 \geq 0$ .

Matemaattinen asia voidaan ilmaista monella tavalla, ml. omaperäisillä ja virheellisillä tavoilla. *Joustava tulkitsija* osaa valita oikean/mielekkään tulkinnan ja ymmärtää eri tavoin ilmaistut asiat. Joustava tulkinta edellyttää usein kokonaisvaltaisempaa tilanteen hahmottamista ja estää takertumasta ”pikkuvirheisiin”. Taannoin matematiikan opetuksen konferenssissa melkein vähän järkytyin kun puhuja kertoi, ettei ulkomaisia opetusvideoita voi käyttää, koska niissä voi olla käytössä eri notaatio kuin omassa kirjassa, jolloin oppilaat menevät sekaisin. Mitä mahdollisuuksia on sellaisen osaamisen soveltamisessa, joka on niin hataralla pohjalla, että hieman erilaiset merkinnät sekoittavat asiat tyystin?

Useassa soveltamistilanteessa voi käyttää useita matemaattisia menetelmiä. *Joustava soveltaja* valitsee tilanteeseen sopivan. Soveltamistilanteissa pitää myös usein koota ratkaisu itse yhdistämällä useita matemaattisia menetelmiä, jota voidaan pitää joustavuuden edistyneempänä muotona.

#### Miksi joustavuus on matematiikassa tärkeää?

Matematiikka hahmotetaan yleisesti, niin opettajien kuin opetuksen tutkijoiden keskuudessa, koostuvan menetelmistä, joita käytetään eri tehtävien ratkaisemiseen. Yhteiskunnallinen kehitys, eritoten tietotekniikan alalla, on johtanut siihen, että menetelmien suorittamisen merkitys on vähentynyt samalla kun menetelmien valinnan ja perustelemisen tärkeys on kasvanut. Kun opetuksessa käytetään tietoteknisiä apuvälineitä, on useilta perinteisiltä tehtäviltä hävinnyt perusta ("kirjoita lauseke ja paina 'solve'...").

Joustavan matematiikan opettamisessa korostuvat juuri nämä seikat, valinta ja perustelu, samalla kun menetelmiä myös sopivassa määrässä harjoitellaan suorittamaan, mikä on myös ymmärryksen kehittymiselle tärkeää. Menetelmistä puhuminen ja niiden vertaileminen keskenään ovat helpohkoja keinoja lisätä tunnille kognitiivista vaatavuutta ja opettaa ns. 21-vuosituhannen taitoja, kuten kriittistä arviointia ja toisten vakuuttamista asiallisilla argumenteilla. Joustavuus on pieni ja konkreettinen askel opetuksen muuttamiseen, ja voi siten olla helpommin otettavissa käyttöön kuin laajempi uudistamisohjelma. Sekin vaatii tosin hieman uudenlaista ajattelua ja asioiden erilaista arvostamista kuin rutiiniorientoitunut lähestymistapa, sekä opettajalta että oppilailta.

Kun asiaa tekee ensimmäisiä kertoja, se vaatii jatkuvaa tietoista ponnistelua.

Rutinoitumisella tarkoitetaan kokemuksen tuomaa automatisoitumista, jossa saman asian voi tehdä vähemmällä tai olemattomalla tietoisella ponnistelulla. Vastaavanlaisesta ilmiöstä on kyse kuuluisassa "Millerin säännössä", jonka mukaan ihmisen työmuistissa voi olla vain noin 7 yksikköä kerralla, mutta se, mikä on yksikkö, voi kuitenkin kehittyä. Esimerkiksi hyvä shakinpelaaja muistaa helposti shakkipelin kaikkien nappuloiden sijainnit lyhyellä katsomisella, sillä hänen yksikkönsä eivät ole yksittäisiä nappuloita vaan isompia kokonaisuuksia.

Edellisen kappaleen rutiinit ja skeemat ovat epäilemättä tärkeitä myös matematiikassa. Ilman hyviä rutiineja ja skeemoja ei voi edetä kohti haastavampia tehtäviä, sillä ihmisen käytettävissä on vain rajallinen työmuisti. Kun matematiikassa puhutaan rutiinitehtävästä, viitataan kuitenkin johonkin muuhun, sillä on tapana jakaa tehtävät rutiini- ja haaste-tehtäviin sen mukaan käytetäänkö niissä ennalta annettua menetelmää vai pitääkö menetelmä itse valita/kehittää. Myös haaste-tehtävissä voidaan kehittää laskurutiinia, ja itse asiassa tekemisen mielekkyys voi lisätä toistojen määrää ja siten rutinoitumista, esimerkiksi hyvin suunnitellussa oppimispelissä. Lisäksi haastetehtävät kehittävät samalla korkeampia kognitiivisia toimintoja, kuten eri ratkaisustrategioiden hyvien ja huonojen puolien punnitsemista ja perustelemista tosille.

#### Mitä matematiikkaa työelämässä tarvitaan?

Usein kysytään, mihin tiettyä matematiikan aihetta, kuten derivaattaa, tarvitaan.

Kysymykseen voi vastata selvittämällä matemaattisen käsitteen sovelluskohteita luonnon- ja insinööritieteissä (enenevässä määrin myös yhteiskunta- ja ihmistieteiden tutkimuksessa).

Cuoco, Goldenberg ja Mark (1996) ovat opetus suunnitelmien sisältöä koskevassa kirjoituksessaan vastanneet samaan kysymykseen toteamalla, että se on väärin asetettu, ja

siihen vastaaminen johtaa ajatukset väärälle polulle. Matemaattinen sisältö, jota kulloinkin opetellaan, ei ole itsetarkoitus vaan väline, jolla opetellaan ajattelun taitoja. Artikkelissa on esitelty useita tällaisia taitoja (pitäisi osata visualisoida, kuvailla toisille, tehdä kokeilujen perusteella johtopäätöksiä, jne.), jotka vastaavat monelta osin sittemmin otsikoihin nousseita 21-vuosituhannen taitoja.

Ei voi lähteä siitä, että koulussa on valmiiksi oppinut ne matemaattiset menetelmät, joita elämässä tarvitaan, vaan myös matematiikan tunneilla pitäisi oppia matematiikan oppimisen taitoa. Kun tulee vastaan tuntematon matemaattinen käsite, pitäisi kyetä itse selvittämään, esimerkiksi wikipediasta, mistä on kyse. Erityisesti tilastollisessa päättelyssä tämä odotetaan olevan tulevaisuudessa asiantuntijatyössä tärkeää. Anekdootina mainittakoon oululainen hi-tech yhtiö, joka työpaikkahaastattelussa antoi hakijoille lyhyen ajan tutustua artikkeliin ennalta tuntemattomasta aiheesta, ja pyysi työnhakijoita selittämään, mitä siinä sanottiin. Tehtävään valittiin matematiikasta väitellyt.

Cuoco, Goldenberg ja Markin kirjoitukseen voisi vielä lisätä tietotekniikan viimeisen 20 vuoden aikana mukaansa tuomat muutokset ihmisten osaamistarpeeseen. Matemaattinen osaaminen konkretisoituu usein tiedonhallinnan tai ohjelmoinnin tehtävissä.

Ohjelmointitehtävät ovat usein laajahkoja: ratkaisu vaatii vähintään kymmeniä rivejä koodia, joskus ongelman pilkkomista osaongelmiin, joita ratkaistaan aliohjelmilla.

Ohjelmointitehtävää aloittaessa on tärkeää arvioida eri lähestymistapojen hyviä ja huonoja puolia (strateginen joustavuus) sekä valita sopivat tietorakenteet, joilla tarvittava informaatio on mahdollisimman kätevästi jäsennelty kyseistä tilannetta varten (representaatioiden joustavuus).

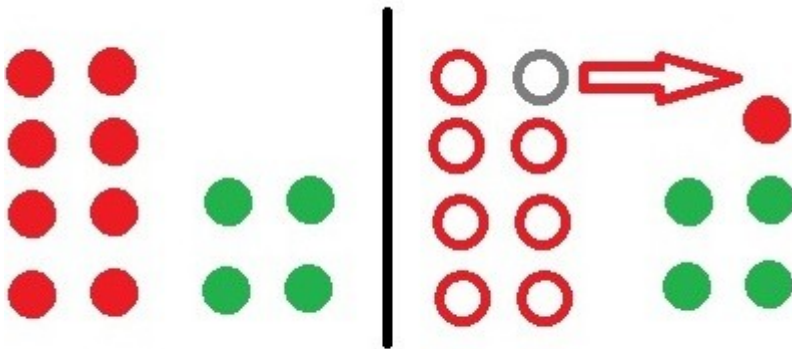
Erilaiset makro- ja skriptitoiminnot hämärtävät rajaa ohjelmoinnin ja ”tavallisen ohjelman” käytön välillä. Keskivertotyössä perusohjelmontiosaamista voisi käyttää nimenomaan erilaisten toistuvien toimintojen automatisointiin, esimerkiksi taulukkolaskennassa tai rekisterien käsittelyssä (ainakin yliopiston hallintoa kun havainnoi huomaa, että täysin käsittämättömiä asioita tehdään käsin). Ohjelmointitaitoa tarvitaan kun halutaan tehdä jotain muuta kuin juuri se johon ohjelma on alun perin suunniteltu, eli siinä vaiheessa kun siirrytään rutiinista kohti itse määriteltyä tietokoneen toimintamallia. Toisin sanoen, ohjelmointi ilman joustavuutta on oikeastaan täysin turhaa, koska standarditoiminnot ovat ohjelmistoissa jo valmiina.

[”Ensin pitää oppia rutiinit, sitten vasta joustavuutta”](#)

Thomas DeFranco (1996) tutki matematiikasta väitelleiden taitoja ratkaista haastavia matemaattisia ongelmia, jotka olivat kuitenkin ratkaistavissa lukiotiedoin. Hän havaitsi, että osa matemaatikoista ei toiminut tilanteessa tarkoituksenmukaisella tavalla vaan he saattoivat esimerkiksi jumittua muistelemaan, ilman menestystä, mitä menetelmää pitikään tässä käyttää. Loputkaan matemaatikoista eivät osanneet ratkaista ongelmia helposti, mutta heidän toimintatapansa edesauttoivat ratkaisun saavuttamista. He saattoivat esimerkiksi lähteä kokeilumielessä käyttämään jotain menetelmää, vaikkeivät olleet varmoja sen toimivuudesta. Jos näytti, ettei se toiminut, niin he vaihtoivat lähestymistapaa. Huomion arvoista on, että ongelmatehtävissä onnistunut ryhmä sisälsi matemaatikoina hyvin pärjänneet kun taas toinen ryhmä koostui henkilöistä, joiden matemaattinen ura ei ollut väitöksen jälkeen ollut yhtä vahvassa nousussa.

Tarinan opetus on, että joustavuuden opettelemista voi vitkutella vaikka kuinka pitkään, mutta tällä on kuitenkin seurauksensa.

Milloin sitten voi aloittaa joustavuuden edistämistä? Eräs oivallinen esimerkki on tamperelaisen opettajan Maarit Laitisen video, jossa ekaluokkalainen pohtii tovin tehtävää  $8+4=_{?}+5$ . Lopulta hän päättää, että vastauksen pitää olla 7, koska jos kasista siirtää yhden yksikön neloseen, niin nelosesta tulee viitonen, ja kasista jää jäljelle seitsemän. Ratkaisussa näkyy taito ymmärtää luku ei ainoastaan sanana lukusana-jonossa, vaan samanaikaisesti määränä (kokonaisuutena), jota voi hahmottaa esimerkiksi pallokuviolla (ks. kuva).



Kolumnia kommentoineet lukijat esittivätkin, että joustavuutta voi harjoitella jo ennen koulua, myös erityisoppilaiden kanssa. Eräs kommentoija muotoilee lähestymistapaa sanoilla ”nopeus ei ole se mitä haetaan vaan ymmärrys ja erilaiset tavat ratkaista asia”, jota myös oppilaille pitäisi muistaa sanoa ääneen.

[”Perinteinen opetus vastaa enemmistön tarpeisiin”](#)

Abstraktilla tasolla voidaan uuden matemaattisen asian opettaminen hahmottaa aiemman menetelmän muokkauksena tai useamman aiemmin tutun menetelmän yhdistämisenä. Matematiikka on tunnetusti hierarkkinen/kumulatiivinen tietorakenne, jossa joutuu helposti vaikeuksiin, jos esitiedoissa on puutetta. Ns. perinteisessä opetuksessa, em. muokkauksen/yhdistämisen suorittaa ulkopuolinen auktoriteetti (oppikirja/opettaja) ja oppilaan tehtäväksi jää uuden menetelmän mieleen painaminen usean toiston avulla.

Tämä lähestymistapa on omiaan takaamaan, että vain kaikkein parhaimmilla oppilailla on mahdollisuus oppia matemaattisen ajattelun kannalta keskeisiä taitoja, kun taas keskiverto-oppilailla (puhumattakaan heikosta) nämä seikat jäävät piiloon. Muistan itse koulussa miten pystyin aina päättämään, mitä matematiikan opettaja oli selittämässä monta minuuttia ennen kuin hän pääsi selityksessään asiaan. Toisin sanoen pystyin kehittämään uuden menetelmän annetun taustatiedon ja tavoitteen avulla nopeammin kuin opettaja sen luokalle selitti. Kovin moni oppilas ei tähän pysty, ja heiltä jää menetelmien kehittäminen ja arvioiminen perinteisessä lähestymistavassa helposti paitsioon.

[Joustavuuden edistäminen käytöstä opetuksessa](#)

Monet opettajat ovat sanoneet, että useampien ratkaisutapojen opettaminen on hyvä sen takia, että toiset oppilaat ymmärtävät toisen ja toiset toisen. Voidaan ajatella, että tässä tilanteessa opettaja on joustava ja opettaa useita tapoja sen mukaan mitä kullekin sopii. Tämä väittäminen kuitenkin viittaa siihen, että opettaja ei odota oppilailta joustavuutta, sillä

kukin valitsee vain yhden ratkaisutavan “omakseen”. Jos tässä asetelmassa haluaa kehittää oppilaiden joustavuutta, voisi esimerkiksi tehdä pienryhmiä, joissa on jäsenenä eri ratkaisutapojen käyttäjiä ja pyytää heitä vertailemaan ratkaisunsa.

Tehtävät, joissa määrätään käyttämään tiettyä ratkaisumenetelmää (esim. ”Ratkaise yhtälöryhmä käyttämällä sijoitusmenetelmää”), ovat joustavuuden kannalta erityisen turmiollisia, samoin opettajat, jotka eivät anna pisteitä jos tehtävä on ratkaistu muulla (vaikkakin matemaattisesti perustellulla) tavalla kuin mitä on opetettu. Kun opettaa toista ratkaisumenetelmää olisi parempi pyytää oppilaita ratkaisemaan tehtävä usealla tavalla, ja käyttää sellaisia tehtäviä, joissa uusi ratkaisutapa on tehokkaampi, sekä auttaa oppilaita itse vertailemaan keskustellen eri ratkaisutapoja.

Yleensä ajatellaan, että oppilaiden välinen vuorovaikutus on erinomainen keino oppimisen edistämiseksi. Nopeammat oppilaat auttavat hitaampia, sillä opettaja ei ehdi kaikkien luokse. Ennen kuin oppimisyhteisö on täysin omaksunut joustavuuteen liittyvät sosiomatemattiset normit, tässä voi kuitenkin piillä myös riski ratkaisujen monimuotoisuudelle. Hyödyllinen normi olisi esimerkiksi ”Neuvo toista hänen menetelmässä, ei omassasi”.

Kun opetin muutama vuosi sitten ongelmaratkaisukurssia tuleville matematiikan opettajille, tuli vastaan seuraava. Yksi opiskelijapari oli työskennellyt jo pari viikkoa keskenään erään ongelman parissa. Olin vähän väliä auttanut heitä eteenpäin sillä ratkaisupolulla, jota he olivat itse lähteneet kulkemaan. Heidän polku ei ollut kaikkein tehokkain, mutta kuitenkin mahdollinen, ja heidän ratkaisu oli jo viittä vaille valmis. Eräällä tunnilla opiskelijat työskentelivät yhdessä yhden toisen (ns. paremman) opiskelijan kanssa, joka oli jo aiemmin ratkaissut ongelman. Hän esitteli heille omaa, erilaista, ratkaisuaan, ja he tulivat kaikki vakuuttuneeksi siitä, että parin viikon työ oli ollut hukkaan heitettyä. Tästä olisi saanut erinomaisen keskustelun ongelmanratkaisun ohjaamisesta, mutta valitettavasti tilanne selvisi minulle vasta jälkikäteen kirjallisesta reflektiosta, sillä opettaja ei ehdi kaikkien luokse.

Lisää joustavuutta

Joustavuusaiheisia keskusteluja voi seurata jatkossakin *Joustavaan matematiikkaan* FB-sivulla. LUMA-Suomi ohjelmassa joustavuutta on esillä ainakin Joustava yhtälöratkaisu -hankkeessa, jossa valmista ilmaista oppimateriaalia löytyy sivulla <https://ouluma.fi/joustava-yhtalonratkaisu/>. Tammikuussa 2019 alkavat myös OPH:n rahoittaman *Joustavaan matematiikkaan* -ohjelman astekohtaiset täydennyskoulutuskurssit verkossa (ml. yläkoulun ja lukion opettajille suunnatut kurssit), ks. lisätietoja osoitteessa [www.flexibility.fi](http://www.flexibility.fi).