

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 11.9

- (1) Anna esimerkki funktiosta jonka määrittely joukko on \mathbb{R}^n ja maalijoukko on \mathbb{R}^m .
- (2) Anna esimerkki injektioista, surjektioista, ja bijektioista jonka määrittely joukko on \mathbb{R}^n ja maalijoukko on \mathbb{R}^m .
- (3) Olkoon $(a_i)_{i=-\infty}^{\infty}$ reaalityön jono. Onko mielekäästä puhua jonon raja-arvosta?
- (4) Kirjoita määritelmää 2.3 siinä erikoistapauksessa että $n = p = 1$ käyttäen aikaisempien kurssien terminologiaa kun se on mielekäästä. Miten määritelmä tässä tapauksessa eroaa aikaisemmilta matematiikan kursseilta tutusta määritelmästä?
- (5) Olkoon \mathbf{A} $n \times m$ matriisi ja \mathbf{b}, \mathbf{x} sopivat vektorit jotta lauseke $\mathbf{F}(\mathbf{x}) := \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b}$ olisi mielekäs. Täydennä kuvauksen \mathbf{F} määritelmä, ja laske kuvauksen derivaatta jossain määrittelyjoukon pisteessä.

Harjoitustehtävät löydät vastaisuudessa kurssin kotisivulta, osoitteessa

<http://cc.oulu.fi/~phasto/teach/anal2/>.

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 18.9

- (1) Osoita, että derivointi on lineaarinen operaatio.
- (2) Todista Lause 3.1.
- (3) Todista valitsemasi väite laatikosta joka on luentomonisteen sivulla 8.
- (4) Pyörä jonka säde on 1 pyörii lipsumatta tasolla. Tarkastellaan pistettä, joka on pyörän kehällä. Kuinka pitkän matkan tämä piste liikkuu sillä aikaa kun pyörä pyörii yhden kierroksen, eli pyörän keskipiste liikkuu 2π verran?
- (5) Mitä jos edellisessä tehtävässä käyttää pyöreän pyörän sijaan neliskulmaista pyörää, tai pyörä jonka muoto on säännöllinen n -kulmio? (Tarkasteltava piste voidaan olettaa olevan jossain kulmassa.)

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 25.9

- (1) Olkoon $F(x, y, z, w) = (xy, zw, xz, yw)$. Laske $DF(x, y, z, w)$.
- (2) Oletetaan, että $F: D \rightarrow \mathbb{R}^p$ on differentioituva kaikkialla D :ssä, ja että D on polkuyhtenäinen, ks. s. 31. Osoita, että jos $DF \equiv 0$, niin F on vakiokuvaus.
- (3) Määritellään $f(x, y) = x^2y \sin \frac{1}{x}$, kun $x \neq 0$ ja $f(0, y) \equiv 0$. Osoita, että f on differentioituva \mathbb{R}^2 :n joka pisteessä.
- (4) Olkoon f kuten edellisessä tehtävässä. Osoita, että $\frac{\partial f}{\partial x}$ on määritelty kaikkialla, mutta epäjatkuva y -akselin kaikissa pisteessä paitsi origossa.
- (5) Olkoon $F(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Tehdään muuttujanvaihto $z = x + y$, $w = x - y$, jolloin saadaan uusi funktio $F(z, w)$. Laske funktion osittaisderivaatat muuttujien z ja w suhteen.

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 2.10

- (1) Olkoon $f(x, y) = x^2 + y^3$. Määrittele pinnan $z = f(x, y)$ tangenttitaso ja normaali pisteessä $(1, -1, 0)$.
- (2) Olkoon $F(x, y, z) = z^5 - xy$. Tutkitaan pintaa $F(x, y, z) = 0$. Osoita, ettei pinnalla ole normaalia pisteessä $(0, 0, 0)$.
- (3) Määritellään pallon pinta parametriesityksellä

$$(\theta, \phi) \mapsto (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi),$$

missä $\theta \in [0, \pi/2)$ ja $\phi \in [0, \pi)$. Mikä on kuvauksen derivaatta pohjoisnavassa, ja mitä tämä tarkoittaa geometrisesti?

- (4) Tutkitaan pintaa $z = -10 + x^2 + 2y^2$. Asetetaan pisteeseen $(\sqrt{2}, 2, 0)$ (erittäin pieni) pallo, ja päästetään se pyörimään pinnalle. Mihin suuntaan pallo lähtee liikkeelle (painovoiman vaikutuksesta)?
- (5) Laitetaan pallo pinnalle kuten edellisessä tehtävässä. Mikä on pallon liikerata?

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 10.10

- (1) Olkoon $x^3 + y^4 + 2x^2y = 0$. Laske y' .
- (2) Vertaa luennolla ja luentomonisteessa annettua joukon $C^k(D)$ määritelmiä, ja osoita, että ne määräävät saman joukon.
- (3) Laske funktion $f(x, y) = \sin(xy^2)$ toinen derivaatta ja toisen kertaluvun Taylor sarja.
- (4) Laske kuvauksen $F(x, y) = (xy, x + y^2, ye^x)$ toinen derivaatta.
- (5) Osoita, että jos $f \in C^k(D)$, niin

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = T_k(f, \mathbf{a}; \mathbf{h}) + o(|\mathbf{h}|^k).$$

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 17.10

- (1) Tutki seuraavien funktioiden kriittiset pisteet: (a) $f(x, y) = x^2y^2$, (b) $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, ja (c) $h(x, y) = x^4 - y^2$.
- (2) Etsi funktion $f(x, y, z) = 2xy + z^2$ minimi ja maksimi joukossa $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.
- (3) Osoita, että jos funktiolla $f \in C^1(\mathbb{R})$ on äärettömän monta paikallista minimiä, niin sillä on äärettömän monta paikallista maksimia.
- (4) Anna edellisen kohdan moniulotteinen vastine, ja tutki onko se tosi.
- (5) Olkoon $D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ kolmio. Anna esimerkki funktiosta $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ jonka ainoa minimi on D :n sisäpiste ja jolla on täsmälleen kaksi maksimia, molemmat joukon D reunalla.

Analyysi II

Harjoitustehtävät 24.10.2007

Välikokeessa menettetyjä pisteitä voi korvata tekemällä tehtävät kirjallisesti ensi viikon laskuharjoitustunnille mennessä. Omia vastauksia voi käydä katsomassa huoneessa M211. Esittämällä hyvän ratkaisun voi saada **korkeintaan 2 puuttuvaa pistettä per tehtävä**.

Ja välikoehan näytti tältä:

Ratkaise tehtävät 1 ja 2...

1. Kuvaus $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ on määritelty lausekkeella $F(x, y, z) = (xy, z + x)$ ja funktio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ lausekkeella $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$, missä $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ on vakio. Laske $DF(x, y, z)$ ja $\nabla f(\mathbf{x})$.
2. Olkoon $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, ja oletetaan, että 0 on funktion kriittinen piste. Määritellään $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kaavalla $g(x) = f(x, 2x)$. Osoita, että 0 on funktion g kriittinen piste. Mitä voit sanoa funktion g kriittisen pisteen laadusta, jos 0 on funktion f (a) minimi, (b) maksimi, tai (c) satulapiste.

...ja valitse tehtävästä 3 kohta a, b TAI c.

- 3a. Olkoon $F = (f_1, f_2)$, missä $f_1, f_2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ilmaise $D^2(F \circ F)$ funktioiden f_1 and f_2 osittaisderivaattojen avulla.
- 3b. Differentioituva funktio $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ on tunnetusti jatkuva, toisaalta osittaisderivaattojen olemassaolo ei vielä takaa funktion differentioituvuutta.
Onko kuitenkin totta, että kaikkien osittaisderivaattojen olemassaolo riittää takaamaan funktion jatkuvuuden? Perustele väitettäsi.
- 3c. (**Esseetehtävä**) Kuvaile periaatteita joita voidaan käyttää derivaatan määrittelyssä kuvaukselle $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Mistä lähdetään? Miten tiedetään annettu määritelmä järkeväksi?

Huom! Esseetehtävässä noudatetaan aineen kirjoittamisen tavanomaisia sääntöjä, eli käytetään kokonaisia virkkeitä, aloitetaan johdannolla, jne.

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 31.10

(1) Olkoon S niiden pisteiden (x, y) joukko, joille $2x^4 + 3y^4 = 1$. Mikä on funktion $f(x, y) = x^2 + y^2$ suurin ja pienin arvo joukossa S ?

(2) Olkoon $f(x, y) = x^2y^4$ ja $D = [0, 1] \times [-1, 1]$. Laske $\int_D f$.

(3) Anna esimerkki funktiosta, joka ei ole integroitava.

(4) Osoita, että jos f ja g ovat integroituvia suorakaiteessa D , niin

$$\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g.$$

(5) Todista, että jos f on jatkuva, niin se on integroitava.

Analyysi II, syksy 2007

Harjoitustehtävät 7.11

- (1) Olkoon $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle $f(x, y) = 1$ jos x tai y on rationaaliluku, ja $f(x, y) = 0$ muuten. Onko f integroituva yli joukon $[0, 1]^2$?
- (2) Olkoon $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{x}| < 1\}$ yksikkökiekko. Laske $\int_D 1 d(x, y)$.
Miksi kyseinen funktio on integroituva?
- (3) Olkoon $0 \leq a < b$ ja olkoon D kolmio, jonka kärjet ovat pisteissä (a, a) , (a, b) ja (b, a) . Laske $\int_D x^2 - y^2 d(x, y)$.
- (4) Olkoon D alue joka koostuu pisteistä (x, y) joille
 $x \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 1$ ja $x^2 + y^2 \leq 2$.
Laske $\int_D f(x, y) d(x, y)$, kun
a) $f(x, y) = x$, b) $f(x, y) = y$.
- (5) Olkoon D kuula jonka säde on 2. Porataan D keskipisteen läpi rekiä jonka säde on 1. Mikä on jäljelle jäävän kappaleen tilavuus?

Analyysi II, syksy 2007
Harjoitustehtävät 14.11

(1) Laske $\int_S x \, dx \, dy$ kun

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + (2y)^2 \leq 4\}.$$

(2) Laske integraali $\int_A xy \, dx \, dy$, kun joukko A on tasoalue, jota rajoittavat suorat $x = 0, y = 0$ sekä käyrä $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

(3) Olkoon $\gamma(t) = (t, t^2)$. Laske $\int_\gamma f(z) \, ds(z)$. Voit valita funktion f haluamallasi tavalla.

(4) Oletetaan, että $f + g$ on Riemann integroituva. Seuraako tästä, että kaava

$$\int_\gamma (f + g) \, ds = \int_\gamma f \, ds + \int_\gamma g \, ds$$

pätee?

(5) Anna esimerkki polusta $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, joka ei ole paloittain C^1 , ja laske $\int_\gamma y \, ds(x, y)$.

Analyysi II, syksy 2007
Harjoitustehtävät 22.11

- (1) Olkoon $\alpha(t) = (1 + t, 1 - t, t^2)$, $t \in [0, 1]$. Laske polkuintegraali $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha$, kun
- $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$,
 - $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$,
- (2) Olkoon L origon kautta kulkeva suora tasossa \mathbb{R}^2 ja olkoon α jokin L :ään sisältyvä C^1 -polku. Osoita, että

$$\int_{\alpha} F \cdot d\alpha = 0, \quad \text{kun } F(x, y) = (y, -x).$$

- (3) Annan täsmällinen määritelmä integraalille $\int_{\alpha} F \cdot d\alpha$ kun $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ on polku ja $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on vektorikenttä. Voit käyttää esim. Riemannin summia.
- (4) Olkoon $\mathbf{E} = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}$ sähkökenttä joukossa $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ (sopivan säännöllinen) alue. Laske $\int_{\partial D} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, eli sähkökentän tekemä työ, kun hiukkanen liikkuu suljetulla radalla.
- (5) Olkoon D x -simppeli alue. Todista, että Divergenssi kaava (=Gaussin kaava) pätee tässä tapauksessa.

Analyysi II, syksy 2007
Harjoitustehtävät 29.11

- (1) Olkoon $F(x, y, z) = (x + y, z, 0)$ ja B_r origokeskeinen r -säteinen pallo. Laske

$$\int_{\partial B_r} F \cdot N \, dS$$

suoraan ja käyttäen Gaußin lausetta.

- (2) Todista Arkimedeen laki, eli, että veteen upotettuun kappaleeseen K vaikuttava voima F on $(0, 0, \rho g|K|)$, missä ρ on veden tiheys ja g on painovoima vakio.
- (3) Laske $\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{x}$ kun $F(x, y, z) = (3x^2y^2z + 2xy, 2x^3yz + x^2 + z, x^3y^2)$ ja $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.
- (4) Täytä kurssin palautelomake, joka ilmestyy verkkoon torstaina. Palautetta voi antaa myös suoraan Peterille tai Juha-Matille.