

**Analyysi III**  
**800624S**



## Sisältö

Esitietoja	5
Riemann integroinnin rajat	6
Luku 1. Mittateoriaa	7
1. Algebra ja $\sigma$ -algebra	7
2. Mitta	8
3. Ulkomitta ja mitalliset joukot	11
4. Ulkomitan konstruointi	14
5. Lebesguen ulkomitta ja mitta	16
Luku 2. Integroimisteoriaa	20
1. Topologisia peruskäsitteitä	20
2. Mitalliset funktiot	20
3. Lebesguen integraali yksinkertaiselle funktiolle	25
4. Integraali ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle	27
5. Keskeiset raja-arvotulokset ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle	29
6. Mitallisen funktion integraali	33
7. Riemannin integraali	36
8. Integraalilaskennan päälause	38
Luku 3. Hilbertin avaruudet	45
1. Funktioavaruudet	45
2. Hilbert avaruuden sovellus	49
3. Sisätuloavaruudet	52
4. Hilbertavaruudet	57
5. Projektiolause ja Fréchet'n–Rieszin lause	61
6. Hilbertin avaruuden operaattoreista	64
7. Lebesgue avaruuden $L^2$ ortonormaali kanta	67
Liite A. Metriset avaruudet	72
1. Metristen avaruuksien perusominaisuudet	72

## **Alkusanat**

Tämä luentomoniste kattaa suurelta osin ne asiat, joita Analyysi III kurssilla käydään läpi alkaen kevätlukukaudesta 2007. Sitten ensimmäisen painoksen, vuonna 1999, kurssin sisältöön on joiltain osin tullut suuriakin muutoksia. Erityisesti Banach avaruuksien teoria on suosiolla jätetty erikoiskurssien, kuten Funktionaali analyysin, läpikäytäväksi. Sen sijaan on lineaarista teoriaa Hilbert avaruudessa käsittelevää osaa laajennettu ja konkretisoitu, sisällyttämällä m.m. Fourier dekomposition teoriaa.

Tämä luentomoniste on jatkuvan kehittämisen tilassa, ja kaikki palaute siitä, miten esitys ja sisältö olisi paranneltavissa ovat tervetulleita.

Oulu, Tammikuu 2007, Peter Hästö

## **Alkusanat, vuoden 1999 painos**

Käsillä oleva moniste on syntynyt kurssin Analyysi III kevätlukukaudella 1999 pidettyjen luentojen pohjalta. Viiden viime vuoden aikana kurssi on hakeutunut oheiseen muotoonsa sisältäen analyysin perusteet metrisessä avaruudessa, normiavaruudessa ja Hilbertin avaruudessa sekä Lebesguen mitan ja integraalin. Näin se pyrkii tarjoamaan pohjatiedot matematiikan, sovelletun matematiikan, tilastotieteen ja fysikaalisten tieteiden syventäville opinnoille, mutta samalla antamaan mahdollisimman laajan katsauksen analyysin eri osa-alueista aineenopettajiksi aikoville.

Ansio siitä, että moniste antaa luennoistani näinkin selkeän kuvan kuuluu Marko Rinta-aholle ja Jukka Taimistolle, joille lausun parhaat kiitokseni.

Linnanmaalla 8.10.1999 Vesa Mustonen

## Esitietoja

Kerrataan joukko-opin peruskäsitteet. Olkoon  $X$  perusjoukko. Tällöin  $P(X)$  on joukon  $X$  kaikkien osajoukkojen joukko. Joukkojen  $A$  ja  $B$  yhdiste on  $A \cup B = \{x \in X \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$ , ja  $A \cap B = \{x \in X \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$  on joukkojen  $A$  ja  $B$  leikkaus.

Joukon  $A$  komplementti  $A^c = \{x \in X \mid x \notin A\}$ , sekä joukkojen  $A$  ja  $B$  erotus  $A \setminus B = \{x \in X \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap B^c$ .

Olkoon  $I$  jokin indeksijoukko ja  $\{A_i \mid i \in I\}$  perhe joukkoja, jolloin

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I \text{ s.e. } x \in A_i\} \quad \text{ja} \quad \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i \forall i \in I\}.$$

Harjoitustehtävänä on todistaa *De Morganin lait*:

Olkoon  $\{A_i \mid i \in I\}$  perhe  $X$ :n osajoukkoja. Tällöin pätee:

$$(1) \quad \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c,$$

$$(2) \quad \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

Olkoot  $A$  ja  $B$  epätyhjiä joukkoja ja  $f : A \rightarrow B$  kuvaus (funktio). Tällöin  $f$  on

**surjektio**,: jos  $f(A) = B$ , eli jokaiselle  $b \in B$  on olemassa sellainen  $a \in A$ , että  $f(a) = b$ .

**injektio**,: jos kaikille  $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ , pätee  $f(a_1) \neq f(a_2)$ .

**bijektio**,: jos  $f$  on sekä surjektio, että injektio.

Jos  $f : A \rightarrow B$  on bijektio, niin jokaista  $b \in B$  kohti on olemassa yksikäsitteinen  $a \in A$ , jolle  $f(a) = b$ . Tällöin on olemassa *käänteiskuvaus*  $f^{-1} : B \rightarrow A, f^{-1}(b) = a$ .

**Määritelmä.** Joukoilla  $A$  ja  $B$  on *sama mahtavuus*, jos on olemassa bijektio  $\psi : A \rightarrow B$ . Tätä merkitään  $A \approx B$ .

Helposti nähdään, että  $\approx$  on ekvivalenssirelaatio kaikkien joukkojen joukossa.

**Esimerkki.** Olkoon  $A = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{Z}_+$  ja  $B = \{1, 4, 9, \dots\}$ , jolloin  $B \subsetneq A$ , mutta kuvaus  $\psi(n) = n^2, n \in A$ , on bijektio  $A \rightarrow B$ . Siis joukot  $A$  ja  $B$  ovat yhtä mahtavia.

**Määritelmä.** Joukkoa  $A$  sanotaan *äärelliseksi*, jos  $A \approx \{1, 2, \dots, m\}$  jollakin  $m \in \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ . Joukko, joka ei ole äärellinen, on *ääretön*. Ääretön joukko on *numeroituva*, jos  $A \approx \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ , muutoin *ylinnumeroituva*.

**Huomautus.** Jos  $A$  on numeroituva, on olemassa bijektio  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow A$ . Tällöin joukon  $A$  alkiot voidaan "numeroida" ts. asettaa jonoon  $\varphi(n) = a_n$  aina, kun  $n = 0, 1, 2, \dots$

**Esimerkki.** Harjoitustehtävänä on osoittaa, että  $\mathbb{Q}$  on numeroituva. Osoitetaan, että avoin väli  $]0, 1[ \subset \mathbb{R}$  ei ole numeroituva.

Tehdään vasta oletus:  $]0, 1[$  on numeroituva, eli välin luvut voidaan asettaa järjestykseen  $l_1, l_2, \dots$ . Olkoot  $l_1 = 0, a_1 b_1 c_1 \dots, l_2 = 0, a_2 b_2 c_2 \dots, \dots$  lukujen

$l_1, l_2, \dots$  desimaaliesitykset. Valitaan sellainen reaaliluku  $y = 0,abc\dots$ , että

$$a = \begin{cases} 1, & \text{jos } a_1 \neq 1, \\ 2, & \text{jos } a_1 = 1, \end{cases} \quad b = \begin{cases} 1, & \text{jos } b_2 \neq 1, \\ 2, & \text{jos } b_2 = 1, \end{cases} \quad \text{jne.}$$

Tällöin  $y \in ]0, 1[$ , mutta  $y \neq l_i, i = 1, 2, \dots$ , joten vasta oletus on väärä. Siis väli  $]0, 1[$  ei voi olla numeroituva.

Koska  $]0, 1[$  on ylinumeroituva, on myös reaalilukujen joukon  $\mathbb{R}$  oltava ylinumeroituva.

### Riemann integroinnin rajat

Aloitetaan palautettamalla mieleen Riemann integraali määritelmä. Olkoon siis  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  funktio, missä  $I = (x, y)$  on reaaliakselin väli. Nousevalle jonolle  $x = z_0 < z_1 < \dots < z_n = y$  määrittelemme ala- ja yläsummat

$$\phi((z_i)_{i=0}^n) = \sum_{i=1}^n |z_i - z_{i-1}| \inf_{z \in (x_{i-1}, x_i)} f(z) \quad \text{ja}$$

$$\Phi((z_i)_{i=0}^n) = \sum_{i=1}^n |z_i - z_{i-1}| \sup_{z \in (x_{i-1}, x_i)} f(z).$$

Funktio  $f$  on *Riemann integroituva*, jos

$$\sup_{(z_i)} \phi((z_i)) = \inf_{(z_i)} \Phi((z_i))$$

ja tällöin  $\int_x^y f(z) dz$  on määritelmän mukaan tämä yhteinen arvo.

Analyysi I kurssilla on todistettu m.m., että jatkuva funktio on Riemann integroituva. Toisaalta, funktio voi olla integroituva, vaikkei se ole jatkuva, kuten seuraava esimerkki osoittaa: Määritellään  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  kaavalla

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{m} & \text{jos } x = \frac{n}{m}, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}^+, (n, m) = 1. \end{cases}$$

Tämä funktio on Riemann integroituva, ja sen integraali on 0. Tässä herää siis kysymys, mitkä funktiot tarkalleen ottaen ovat Riemann integroituvia? Tähän kysymykseen saadaan vastaus yleisemmän teorian melkein pä sivutuotteena.

Käytetään vielä edellistä funktiota  $f$  funktiojonon  $(f_i)$  määrittelemiseksi seuraavasti. Kun  $i \geq 2$  asetetaan  $f_i(x) = \min\{if(x), 1\}$ . Helposti nähdään, että myös  $\int_0^1 f_i(x) dx = 0$ . Määritellään lisäksi  $f_\infty(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x)$ . Tästä saadaan, että

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ 1 & \text{jos } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tälle funktiolle yläsumma on aina 1, ja alasumma aina 0. Näin ollen se ei ole Riemann integroituva. Erityisesti näemme, että seuraava varsin uskottava kaava ei aina päde Riemann integraalille:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b f_i(x) dx = \int_a^b \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) dx,$$

eli integroinnin ja raja-arvon otton järjestyksestä ei voi vaihtaa. Toinen kohta päiväjärjestyksessä on siis sellaisen integraalin määrittelemisen, joka käyttäytyy paremmin raja-arvon ottamisen suhteen.

## LUKU 1

### Mittateoriaa

#### 1. Algebra ja $\sigma$ -algebra

Osoittautuu, että hyvä tapa parantaa integraalin toimivuutta, on ylä- ja alasumman termin  $|x_i - x_{i-1}|$  yleistäminen. Tämä termi kertoo annetun välin pituuden. Yleistämistä on, että tässä sallittaisiinkin väliä yleisempi joukko.

Ensimmäinen idea saattaisi olla sallia välin sijaan mielivaltainen joukko. Tämä ei kuitenkaan osoittautu toimivaksi vaihtoehdoksi, vaan rajoittautuminen n.s.  $\sigma$ -algebraan osoittautuu paremmaksi etenemistavaksi. Tämä on siis se polku jota nyt lähdetään kulkemaan, tavoitteena, parikymmentä sivua myöhemmin, uusi, parempi integraali.

**Määritelmä 1.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $P(X)$  sen kaikkien osajoukkojen joukko. Perhe  $\mathcal{A} \subset P(X)$  on *algebra* eli joukkoalgebra, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- (A1)  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .
- (A2) Jos  $A \in \mathcal{A}$ , niin  $A^c \in \mathcal{A}$ .
- (A3) Jos  $A, B \in \mathcal{A}$ , niin  $A \cup B \in \mathcal{A}$ .

**Huomautus.** Jos  $A, B \in \mathcal{A}$  ja  $\mathcal{A}$  on algebra, niin myös  $A \cap B \in \mathcal{A}$ , sillä  $(A \cap B) = (A^c \cup B^c)^c$ . Vastaavasti myös  $X \in \mathcal{A}$ , sillä  $X = \emptyset^c \in \mathcal{A}$ .

Jos tiedetään, että  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , niin (A1) seuraa kohdista (A2) ja (A3), sillä  $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{A}$  aina, kun  $A \in \mathcal{A}$ .

Jos  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ , niin kohdan (A3) nojalla  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{A}$ .

**Määritelmä 1.2.** Olkoon  $X$  joukko. Perhe  $\Gamma \subset P(X)$  on  $\sigma$ -algebra, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- (SA1)  $\emptyset \in \Gamma$ .
- (SA2) Jos  $A \in \Gamma$ , niin  $A^c \in \Gamma$ .
- (SA3) Jos  $A_i \in \Gamma$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ .

**Huomautus.** Olkoon  $\Gamma$   $\sigma$ -algebra. Jos  $A_1, A_2 \in \Gamma$  ja  $A_k = \emptyset$  aina, kun  $k \geq 3$ , niin  $A_1 \cup A_2 = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ . Näin ollen jokainen  $\sigma$ -algebra on algebra. Jos  $A_i \in \Gamma$  ovat mielivaltaisia, niin  $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$ , sillä

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left( \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c \right)^c = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \Gamma.$$

**Esimerkki.** Olkoon  $X$  joukko. Joukko  $\Gamma = \{\emptyset, X\}$  on suppein mahdollinen, ns. triviaali  $\sigma$ -algebra. Joukko  $\Gamma = P(X)$  on laajin mahdollinen  $\sigma$ -algebra.

Jos  $X = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ , niin  $\Gamma = \{\emptyset, \{1, 3, \dots\}, \{2, 4, \dots\}, \mathbb{Z}_+\}$  on  $\sigma$ -algebra.

Olkoon  $X$  euklidinen avaruus  $\mathbb{R}^n$ . Tällöin joukko  $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ avoin}\}$  ei ole algebra, eikä  $\sigma$ -algebra, sillä yleensä  $A^c$  ei ole avoin, jos  $A$  on avoin.

**Lause 1.3.** *Olkoot  $\Gamma_i, i \in I$ , joukon  $X$   $\sigma$ -algebroida. Tällöin myös  $\Gamma = \bigcap_{i \in I} \Gamma_i$  on  $\sigma$ -algebra.*

TODISTUS. Selvästi  $\emptyset \in \Gamma_i$  aina, kun  $i \in I$ , joten  $\emptyset \in \Gamma$ .

Jos  $A \in \Gamma$ , niin  $A \in \Gamma_i$  jokaisella  $i \in I$ . Siis  $A^c \in \Gamma_i$  jokaisella  $i \in I$ . Tällöin  $A^c \in \Gamma$ .

Jos  $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$ , niin  $A_1, A_2, \dots \in \Gamma_i$  jokaisella  $i \in I$ . Tällöin  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma_i$  aina, kun  $i \in I$ , joten  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \Gamma$ .  $\square$

**Seuraus 1.4.** *Jos  $\Delta \subset P(X)$  on mielivaltainen, niin joukossa  $P(X)$  on olemassa suppein  $\sigma$ -algebra, merkitään  $\Gamma_{\Delta}$ , johon  $\Delta$  sisältyy ( $\Gamma_{\Delta}$  on joukon  $\Delta$  virittämä  $\sigma$ -algebra).*

TODISTUS. Joukko

$$\Gamma_{\Delta} = \bigcap \{ \Gamma \mid \Gamma \text{ on } \sigma\text{-algebra, jolle } \Delta \subset \Gamma \} \subset P(X)$$

on haluttu  $\sigma$ -algebra.  $\square$

**Määritelmä 1.5.** Olkoon  $X$  metrinen avaruus. Joukon

$$\mathcal{A} = \{ A \subset X \mid A \text{ avoin} \}$$

virittämää  $\sigma$ -algebraa sanotaan *Borelin joukkoluokaksi* ja sen joukkoja *Borelin joukoiksi*. Tätä merkitään  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X) = \Gamma_{\mathcal{A}}$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $X$  euklidinen avaruus  $\mathbb{R}^n$  ja  $S = \{ B \subset \mathbb{R}^n \mid B \text{ suljettu} \}$ . Tällöin  $\Gamma_S = \Gamma_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}$ , sillä jos  $A \in \mathcal{A}$ , niin  $A^c \in S$ . Kuitenkaan kaikki avaruuden  $\mathbb{R}^n$  osajoukot eivät ole Borelin joukkoja.

Tarkastellaan vielä erikoistapausta  $X = \mathbb{R}$ . Jokainen yksiö on Borelin joukko, sillä  $\{x\} = ((-\infty, x) \cup (x, \infty))^c$  aina, kun  $x \in \mathbb{R}$ . Koska  $\mathbb{Q}$  on yksiöiden numeroituva yhdiste, niin  $\mathbb{Q}$  ja  $\mathbb{Q}^c$  ovat Borelin joukkoja.

## 2. Mitta

Edellä olemme määritelleet sen joukkoperheen ( $\sigma$ -algebra), jolla haluaisimme korvata Riemann integraalissa esiintyvät välit. Seuraavaksi pitää miettiä, miten korvaamme tällaisilla joukoilla termin  $|x_i - x_{i-1}|$ , joka mittasi välin pituutta. Yleisemmin voimme puhua joukon koon mittaamisesta, ja tämä tehdään luonnollisesti mitan avulla. Se mitä on järkevältä mitta funktiolta vaadittava, selviää tässä luvussa.

**Määritelmä 2.1.** Olkoon  $\Gamma$   $\sigma$ -algebra joukossa  $X$ . Kuvausta  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  sanotaan *mitaksi* joukossa  $X$ , jos

- (M1)  $\mu(A) \geq 0$  aina, kun  $A \in \Gamma$ .
- (M2)  $\mu(\emptyset) = 0$ .
- (M3)  $\mu$  on numeroituvasti additiivinen, eli

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

aina, kun  $A_i \in \Gamma$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset$  aina, kun  $i \neq j$ .

**Huomautus.** Summa  $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  on aina määritelty, mutta se voi olla  $+\infty$ .

Ehtoon (M3) sisältyy ns. äärellinen additiivisuus:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^p A_i\right) = \sum_{i=1}^p \mu(A_i),$$

missä  $A_1, \dots, A_p \in \Gamma$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset$  aina, kun  $i \neq j$ .

Jos  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  toteuttaa ehdot (M1) ja (M3) ja jos  $\mu(A) < \infty$  jollekin  $A \in \Gamma$ , niin

$$\mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset).$$

Näin ollen  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $\Gamma = \{\emptyset, X\}$ ,  $X \neq \emptyset$ . Asetetaan  $\mu(\emptyset) = 0$  ja  $\mu(X) = 1$ , jolloin  $\mu$  on mitta.

Olkoon  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  annettu piste ja  $\Gamma = P(\mathbb{R}^n)$ . Osoitetaan, että kuvaus  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x_0 \in A, \\ 0, & \text{jos } x_0 \notin A, \end{cases}$$

on mitta. Selvästi  $\mu(A) \geq 0$  aina, kun  $A \in \Gamma$ . Lisäksi  $\mu(\emptyset) = 0$ , sillä  $x_0 \notin \emptyset$ . Olkoot nyt  $A_1, A_2, \dots \subset \mathbb{R}^n$  erillisiä. Jos  $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Jos  $x_0 \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ , niin

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Siis  $\mu$  on mitta. Huomaa, että  $\mu(\{x_0\}) = 1$ . Tätä mittaä sanotaan *Diracin  $\delta$ -mitaksi*, joka on keskittynyt pisteeseen  $x_0$ , ja sitä merkitään  $\delta_{x_0} := \mu$ .

**Määritelmä 2.2.** Olkoon  $X$  joukko,  $\Gamma \subset P(X)$   $\sigma$ -algebra ja  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  mitta. Jos  $\mu(X) < \infty$ , niin  $\mu$  on *äärellinen mitta*. Jos on olemassa sellaiset  $E_i \in \Gamma$ , että  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  ja  $\mu(E_i) < \infty$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\mu$  on  *$\sigma$ -äärellinen mitta*.

**Esimerkki.** Diracin mitta  $\delta_{x_0}$  on äärellinen, sillä  $\delta(\mathbb{R}^n) = 1$ . Mittaa, jolle  $\mu(X) = 1$ , sanotaan *todennäköisyyksimitaksi*.

Olkoon  $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  ja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  jono positiivisia lukuja. Asettamalla

$$\mu : P(X) \rightarrow [0, \infty], \quad \mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{jos } A = \emptyset, \\ \sum_{x_i \in A} p_i, & \text{jos } A \neq \emptyset, \end{cases}$$

saadaan mitta. Tämä on ns. painotettu lukumäärämitta, painoina luvut  $p_i$ . Jos  $p_i = 1$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\mu$  on lukumäärämitta:

$$\mu(A) = \begin{cases} \#A, & \text{jos } A \text{ on äärellinen,} \\ \infty, & \text{jos } A \text{ on ääretön.} \end{cases}$$

**Lemma 2.3.** Olkoon  $\Gamma$   $\sigma$ -algebra joukossa  $X$  ja  $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma$  jono joukkoja. Tällöin on olemassa sellainen jono  $(B_k)_{k=1}^{\infty} \subset \Gamma$ , että  $B_k \subset A_k$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Lisäksi  $B_k \cap B_j = \emptyset$  aina, kun  $k \neq j$ , ja  $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ .

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

**Lause 2.4.** Olkoon  $\mu : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  mitta joukossa  $X$  ja olkoot  $A, B \in \Gamma$ . Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat voimassa:

- (a) Jos  $A \subset B$ , niin  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .
- (b) Jos  $A \subset B$  ja  $\mu(A) < \infty$ , niin  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ .
- (c) Jos  $A_i \in \Gamma$  kaikilla  $i \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  (ns. numeroituva subadditiivisuus).
- (d) Jos  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  ja  $A_i \in \Gamma$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ .
- (e) Jos  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ,  $A_i \in \Gamma$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $\mu(A_k) < \infty$  eräällä  $k$ , niin  $\mu(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i)$ .

TODISTUS. (a) Jos  $A \subset B$ , niin  $B = A \cup (B \cap A^c)$ , missä  $A \in \Gamma$  ja  $B \cap A^c \in \Gamma$  ovat erillisiä joukkoja. Tällöin mitan ominaisuuksien (M3) ja (M1) nojalla

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \cap A^c) \geq \mu(A).$$

- (b) Jos  $A \subset B$  ja  $\mu(A) < \infty$ , niin edelläolevan nojalla

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B \cap A^c) = \mu(B) - \mu(A).$$

- (c) Olkoon  $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Gamma$ . Lemman 2.3 nojalla on olemassa jono sellaisia erillisiä joukkoja  $(B_i)_{i=1}^{\infty} \in \Gamma$ , että  $B_i \subset A_i$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ . Ominaisuuden (M3) ja lauseen kohdan (a) nojalla

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

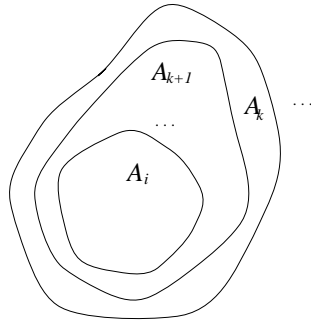
- (d) Olkoon  $A_0 = \emptyset$  ja olkoot  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , missä  $A_i \in \Gamma$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Merkitään  $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ , jolloin

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap A_{i-1}^c).$$

Merkitään  $B_i = A_i \cap A_{i-1}^c$ . Tällöin joukot  $B_i$  ovat erillisiä, joten

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^j \mu(B_i) \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j). \end{aligned}$$

- (e) Olkoot  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  (ks. kuva 1) ja  $A_i \in \Gamma$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Olkoon lisäksi



KUVA 1. Joukot  $A_i$

$\mu(A_k) < \infty$  jollain  $k$ . Merkitään  $B_i = A_k \cap A_i^c$  kaikilla  $i \geq k$ . Siis  $A_i = A_k \cap B_i^c$ , ja

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i &= \bigcap_{i=k}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=k}^{\infty} (A_k \cap B_i^c) = A_k \cap \left( \bigcap_{i=k}^{\infty} B_i^c \right) \\ &= A_k \cap \left( \bigcup_{i=k}^{\infty} B_i \right)^c. \end{aligned}$$

Koska  $B_i \subset B_{i+1}$  aina, kun  $i \geq k$ , on kohdan (d) nojalla  $\mu(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i)$ . Edelleen kohdan (b) nojalla

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mu(A_k) - \mu\left(\bigcup_{i=k}^{\infty} B_i\right) \\ &= \mu(A_k) - \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(B_i) = \mu(A_k) - \lim_{i \rightarrow \infty} (\mu(A_k) - \mu(A_i)) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i). \end{aligned} \quad \square$$

**Huomautus.** Ehto  $\mu(A_k) < \infty$  jollain  $k$  on oleellinen ylläolevassa päättelyssä.

### 3. Ulkomitta ja mitalliset joukot

Edellä olemme määritelleet joukot joita haluaisimme integroinnissa käyttää, sekä tapa jolla niiden koko haluaisimme mitata. Ongelma on, että meillä ei tois- taiseksi ole käytössämme yhtään epätriviaalia mitta, jolla voisi mitata esimerkiksi kaikkia Borel joukkoja. Sellaisen konstruomiseksi noudatamme seuraavaa strate- giaa: määrittelemme heikomman tyyppin mitan, niin sanotun ulkomitan, ja osoi- tamme, että siihen liittyy luonnollisella tavalla  $\sigma$ -algebra jolla se on itse asiassa mitta.

**Määritelmä 3.1.** Olkoon  $X$  joukko. Kuvausta  $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$  sanotaan *ulkomitaksi* joukossa  $X$ , jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

(UM1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ .

(UM2)  $\mu^*$  on monotoninen ts.  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$  aina, kun  $A \subset B$ .

(UM3)  $\mu^*$  on numeroituvasti subadditiivinen, eli

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Jokainen mitta on myös ulkomitta, mutta ei kääntäen.

**Määritelmä 3.2.** Olkoon  $\mu^*$  ulkomitta joukossa  $X$ . Joukkoa  $E \subset X$  sanotaan *mitalliseksi ulkomitan  $\mu^*$  suhteen*, eli  $\mu^*$ -mitalliseksi, jos seuraava, ns. Carathéodoryn ehto, on voimassa:

$$(3) \quad \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c),$$

aina, kun  $A \subset X$ .

Joukko on siis mitallinen, jos se ei jaa mitään joukko niin huonolla tavalla, että osien mittojen summa ei ole joukon mitta.

**Huomautus.** Koska  $\mu^*$  on subadditiivinen ja  $A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$ , niin

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Siis (3) on voimassa, jos epäyhtälö

$$(4) \quad \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

pätee. Jos  $A \subset X$  ja  $E \subset X$  ovat mielivaltaisia, niin

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \mu^*(E) + \mu^*(A).$$

Jos lisäksi  $\mu^*(E) = 0$ , niin ehto (4) on voimassa ja  $E$  on mitallinen. Näin ollen kaikki joukot, joiden ulkomitta on nolla, ovat mitallisia.

**Esimerkki.** Joukot  $\emptyset$  ja  $X$  ovat  $\mu^*$ -mitallisia, sillä

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap \emptyset^c) = \mu^*(A \cap X) + \mu^*(A \cap X^c)$$

aina, kun  $A \subset X$ .

Olkoon  $X$  epätyhjä joukko ja

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{jos } A = \emptyset, \\ 1, & \text{jos } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Nyt  $X$  ja  $\emptyset$  ovat  $\mu^*$ -mitallisia, joten olkoon  $\emptyset \subsetneq E \subsetneq X$ . Tällöin  $E$  on  $\mu^*$ -mitallinen, jos ehto (3) pätee, eli jos

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

aina, kun  $A \subset X$ . Sijoittamalla  $A = X$  saadaan ylläoleva yhtälö muotoon  $1 = 1+1$ , mikä on mahdotonta. Siis  $E$  ei ole  $\mu^*$ -mitallinen.

Olkoon  $X$  kuten edellä ja määritellään ulkomitta  $\mu^*$  seuraavasti:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \#A, & \text{jos } A \text{ on äärellinen pistejoukko,} \\ \infty, & \text{jos } A \text{ on ääretön.} \end{cases}$$

Harjoitustehtävänä on osoittaa, että  $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$  on ulkomitta ja että kaikki joukot  $E \subset X$  ovat  $\mu^*$ -mitallisia.

Seuraavan lemmän voi todistaa induktiolla. Todistus jätetään harjoitukseksi.

**Lemma 3.3.** *Olkoot  $E_1, E_2, \dots, E_n$  erillisiä  $\mu^*$ -mitallisia joukkoja. Tällöin*

$$\mu^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

*kaikille joukoille  $A \subset X$ .*

**Lemma 3.4.** *Olkoon  $\mu^*$  ulkomitta joukossa  $X$ . Jos joukot  $E_1, \dots, E_n \subset X$  ovat  $\mu^*$ -mitallisia, niin myös  $\bigcup_{i=1}^n E_i$  on  $\mu^*$ -mitallinen.*

**TODISTUS.** Induktioperiaatteen nojalla riittää osoittaa väite, kun  $n = 2$ . Olkoot siis  $E_1, E_2 \subset X$   $\mu^*$ -mitallisia ja  $A \subset X$  mielivaltainen. Jos  $\mu^*(A) = \infty$ , niin ehto (4) on voimassa joukolle  $E_1 \cup E_2$  ja väite pätee. Olkoon siis  $\mu^*(A) < \infty$ . Koska

$$\begin{aligned} A \cap (E_1 \cup E_2) &= (A \cap E_1) \cup ((A \cap E_2) \cap E_1^c) \text{ ja} \\ A \cap (E_1 \cup E_2)^c &= A \cap E_1^c \cap E_2^c, \end{aligned}$$

niin

$$\begin{aligned}
& \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^{\mathbb{C}}) \\
& \leq \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*((A \cap E_1^{\mathbb{C}}) \cap E_2) + \mu^*((A \cap E_1^{\mathbb{C}}) \cap E_2^{\mathbb{C}}) \\
& = \mu^*(A \cap E_1) + \mu^*(A \cap E_1^{\mathbb{C}}) = \mu^*(A). \quad \square
\end{aligned}$$

**Lause 3.5.** *Olkoon  $\mu^*$  ulkomitta joukossa  $X$  ja olkoon*

$$\Gamma = \{E \in P(X) \mid E \text{ on } \mu^* \text{-mitallinen}\}.$$

*Tällöin  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra ja ulkomitan  $\mu^*$  rajoittuma  $\mu = \mu^*|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  on mitta.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että  $\Gamma$  on  $\sigma$ -algebra. Koska  $\emptyset$  on aina mitallinen, niin ehto (SA1) on voimassa. Jos  $E \in \Gamma$  ja  $A \subset X$  ovat mielivaltaisia, niin

$$\begin{aligned}
& \mu^*(A \cap E^{\mathbb{C}}) + \mu^*(A \cap (E^{\mathbb{C}})^{\mathbb{C}}) \\
& = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^{\mathbb{C}}) \\
& = \mu^*(A).
\end{aligned}$$

Näin ollen  $E^{\mathbb{C}} \in \Gamma$  ja ehto (SA2) on voimassa.

Lemman 2.3 nojalla riittää, että ehto (SA3) osoitetaan erillisille joukoille. Olkoot  $E_1, E_2, \dots \in \Gamma$  ja  $A \subset X$ . Merkitään

$$S_n = \bigcup_{i=1}^n E_i, \quad \text{aina, kun } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Lemman 3.4 nojalla  $S_n \in \Gamma$  aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ , ja Lemman 3.3 nojalla

$$\mu^*(A \cap S_n) = \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i).$$

Koska  $S_n \in \Gamma$ , niin

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) & = \mu^*(A \cap S_n) + \mu^*(A \cap (S_n)^{\mathbb{C}}) \\
& = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right)^{\mathbb{C}}) \\
& \geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^{\mathbb{C}})
\end{aligned}$$

aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Siis

$$\begin{aligned}
\mu^*(A) & \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^{\mathbb{C}}) \\
& \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i)\right) + \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^{\mathbb{C}}) \\
& = \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)) + \mu^*(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^{\mathbb{C}}).
\end{aligned}$$

Näin ollen ehto (4) on voimassa joukolle  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , eli  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \Gamma$ .

Osoitetaan vielä, että  $\mu = \mu^*|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow [0, \infty]$  on mitta. Riittää osoittaa, että ehto (M3) on voimassa, eli että  $\mu$  on numeroituvasti additiivinen. Olkoot  $E_1, E_2, \dots \in \Gamma$  erillisiä joukkoja. Koska Lemman 3.3 nojalla

$$\mu^* \left( A \cap \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) \right) = \sum_{i=1}^n \mu^* (A \cap E_i)$$

aina, kun  $A \subset X$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , niin valitsemalla  $A = \bigcup_{i=1}^n E_i$  saadaan

$$\mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \geq \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^n E_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu^* (E_i)$$

aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Siis

$$\mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* (E_i).$$

Toisaalta  $\mu^*$  on numeroituvasti subadditiivinen, joten myös epäyhtälö " $\leq$ " on edellisellä rivillä voimassa, josta seuraa, että oikeasti siinä pätee yhtäsuuruus, ja näin ollen  $\mu$  on mitta.  $\square$

#### 4. Ulkomitan konstruointi

Tässä vaiheessa saattaa jo tuntua itsensä toistamiselta sanoa, että osaisimme mitata joukkoja hyvin mitalla, jonka saisimme ulkomitasta, jota meillä ei kuitenkaan ole. Tässä kappaleessa näytämme, miten ulkomitan voi konstruoida vieläkin heikommasta mittausvälineestä, esimitasta.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $X$  joukko ja  $\mathcal{K} \subset P(X)$  perhe joukon  $X$  osajoukkoja. Perhettä  $\mathcal{K}$  sanotaan joukon  $X$  *peiteluokaksi*, jos

(P1)  $\emptyset \in \mathcal{K}$ .

(P2) Jokaiselle  $A \subset X$  on olemassa sellainen jono  $(E_i)_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ , että  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$  (ts.  $A$  voidaan peittää perheen  $\mathcal{K}$  joukoilla).

Kuvausta  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$ , jolle  $\lambda(\emptyset) = 0$ , sanotaan *esimitaksi*.

**Esimerkki.** Olkoon  $X = \mathbb{R}$  ja  $\mathcal{K} = \{(a, b) \mid a \leq b\}$ . Nyt  $\emptyset = (a, a) \in \mathcal{K}$  ja  $\mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} ]-i, i[$ . Siis  $\mathcal{K}$  on peiteluokka. Määritellään  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  asettamalla

$$\lambda((a, b)) = b - a \quad (\text{välin pituus}).$$

Tällöin  $\lambda$  on esimita. Olkoon  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , ja määritellään

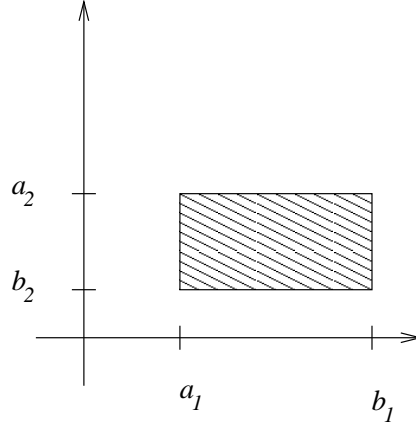
$$\mathcal{K} = \left\{ \prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid a_i \leq b_i \right\}.$$

Nyt  $\mathcal{K}$  koostuu  $\mathbb{R}^n$ :n *avoimista väleistä*  $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$ . Lisäksi  $\mathcal{K}$  on joukon  $\mathbb{R}^n$  peiteluokka, sillä

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j, \quad \text{missä } I_j = (-j, j) \times \cdots \times (-j, j) = (-j, j)^n.$$

Määritellään esimita  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  *geometrisena mittana*:

$$\lambda \left( \prod_{j=1}^n (a_j, b_j) \right) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

KUVA 2. Avaruuden  $\mathbb{R}^2$  avoin väli

**Lause 4.2.** Olkoon  $X$  joukko,  $\mathcal{K}$  sen peiteluokka ja  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  esimitta. Tällöin kuvaus  $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ , jolle

$$(5) \quad \mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \text{ ja } E_i \in \mathcal{K} \forall i \right\},$$

on ulkomitta.

TODISTUS. Osoitetaan ulkomitan määritelmän kohdat (UM1)–(UM3).

Nyt  $\mu^*(\emptyset) = 0$ , sillä  $\emptyset \in \mathcal{K}$  ja  $\lambda(\emptyset) = 0$ . Siis (UM1) pätee.

Olkoot  $A \subset B \subset X$ . Jos  $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ , missä  $E_i \in \mathcal{K}$  jokaisella  $i$ , niin selvästi myös  $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ . Tällöin

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$$

ja (UM2) pätee.

Olkoot nyt  $A_1, A_2, \dots \subset X$  ja  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Infiniumin määritelmästä seuraa, että jos  $A \subset X$ , niin jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ , että

$$\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_i) < \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Nyt jokaista  $i \in \mathbb{Z}_+$  kohti on olemassa sellainen kokoelma  $(E_k^{(i)})_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$ , että  $A_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(i)}$  ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k^{(i)}) < \mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Koska  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} E_k^{(i)}$ , niin

$$\begin{aligned} \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &\leq \sum_{i,k=1}^{\infty} \lambda(E_k^{(i)}) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k^{(i)}) < \sum_{i=1}^{\infty} \left(\mu^*(A_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Koska  $\varepsilon$  oli mielivaltainen, saadaan

$$\mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^* (A_i).$$

Siis (UM3) pätee, joten  $\mu^*$  on ulkomitta.  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $X = \mathbb{R}$  ja  $\mathcal{K} = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{x\} \mid x \in \mathbb{R}\}$  peiteluokka. Määritellään esimitta  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  seuraavasti:  $\lambda(\emptyset) = 0$ ,  $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$  ja  $\lambda(\{x\}) = 1$  kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ . Harjoituksena on osoittaa, että näin saadaan ulkomitta  $\mu^* : P(X) \rightarrow [0, \infty]$ ,  $\mu^*(A) = \#A$  aina, kun  $A \subset \mathbb{R}$ .

## 5. Lebesguen ulkomitta ja mitta

Nyt tulemme kurssin ensimmäisen osan loppuun, ja voimme poimia hedelmät, joita tähänastinen työemme on tuottanut. Konstruoinimme Lebesgue'in ulkomitan joka toimii Euklidisessa avaruudessa  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$ , kaikille Borel joukoille ja muillekin.

Joukkoa

$$I = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_k \in (a_k, b_k) \ \forall k = 1, \dots, n\}$$

sanotaan avaruuden  $\mathbb{R}^n$  *avoimeksi väliksi*. Olkoon  $\mathcal{K}$  kaikkien avaruuden  $\mathbb{R}^n$  avoimien välien muodostama joukko. Tällöin  $\mathcal{K}$  on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  peiteluokka. Määritellään kuvaus  $\lambda = \lambda_n : \mathcal{K} \rightarrow [0, \infty]$  seuraavasti:

$$\lambda_n(\emptyset) = 0, \quad \lambda_n(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) \ \forall I \in \mathcal{K}.$$

Tällöin  $\lambda_n$  on esimitta (geometrinen mitta).

**Huomautus.** Geometrinen mitta on sama myös suljetuille ja ”puoliavoimille” väleille.

**Määritelmä 5.1.** Euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^n$  ylläolevasta peiteluokasta  $\mathcal{K}$  ja geometrisesta esimitasta  $\lambda = \lambda_n$  lähtien konstruointua ulkomittaa

$$m^*(A) = m_n^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(I_j) \mid I_j \in \mathcal{K}, A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \right\}$$

sanotaan *Lebesguen ulkomitaksi* ja  $m_n^*$ -mitallisia joukkoja *Lebesgue-mitalliseksi*. Vastaavaa  $\sigma$ -algebraa merkitään  $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ . Saatua mitta  $m = m^*|_{\mathcal{M}}$  sanotaan *Lebesguen mitaksi*.

Jatkossa puhutaan mitasta  $m$  ja ulkomitasta  $m^*$  tarkoittaen nimenomaan Lebesguen mitta ja ulkomitta. Seuraavaksi pyritään karakterisoimaan  $\sigma$ -algebraa  $\mathcal{M}$ . Yleisten tulosten perusteella tiedetään, että  $\emptyset \in \mathcal{M}$  ja  $\mathbb{R}^n \in \mathcal{M}$ . Lisäksi, jos  $E \subset \mathbb{R}^n$  ja  $m^*(E) = 0$ , niin  $E \in \mathcal{M}$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ , jolloin

$$m^*(\{x\}) \leq \inf_{\{x\} \subset I} \lambda(I) = 0.$$

Siis  $\{x\} \in \mathcal{M}$  aina, kun  $x \in \mathbb{R}^n$ . Tällöin

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{x^{(i)}\} = \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\} \in \mathcal{M}$$

ja

$$m^* (\{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^* (\{x^{(i)}\}) = 0.$$

Siis  $m^* (\mathbb{Q}^n) = 0$ , joten  $\mathbb{Q}^n \in \mathcal{M}$ .

**Lemma 5.2.** *Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  jokaisen välin ulkomitta on sama kuin sen geometrisen mitta.*

TODISTUS. Olkoon aluksi  $I = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$  (suljettu väli). Nyt  $I$  voidaan peittää avoimella välillä, jonka geometrisen mitta eroaa välin  $I$  geometrisestä mitasta vähemmän kuin  $\varepsilon$ . Yhtälön (5) nojalla

$$m^* (I) \leq \lambda (I) + \varepsilon,$$

joten  $m^* (I) \leq \lambda (I)$ .

Olkoon  $I \subset \cup_k I_k$  peite avoimilla väleillä. Tällöin  $\lambda (I) \leq \sum_k \lambda (I_k)$ , joten  $\lambda (I) \leq \inf \sum_k \lambda (I_k) = m^* (I)$ . Siis välttämättä  $m^* (I) = \lambda (I)$ . Vastaava päättely pätee kaikille väleille  $I \subset \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Huomautus.** Tulos  $m^* (I) = \lambda (I)$  pätee myös surkastuneille väleille  $I$ , missä  $a_k = b_k$  jollakin  $k$ . Tällöin  $m^* (I) = 0$ .

**Lause 5.3.** *Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  jokainen väli  $I$  on mitallinen ja*

$$m (I) = m^* (I) = \lambda (I).$$

TODISTUS. Lemman 5.2 nojalla riittää todistaa, että jokainen väli  $I$  on mitallinen. Olkoon  $I$  väli ja olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  mielivaltainen osajoukko, jolle  $m^* (A) < \infty$ . Mitallisuuden takaamiseksi on osoitettava, että

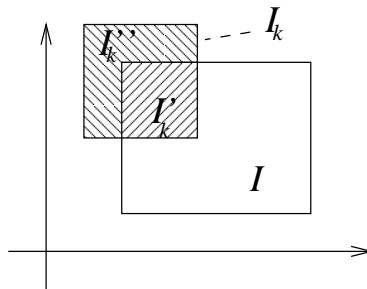
$$m^* (A) \geq m^* (A \cap I) + m^* (A \cap I^c).$$

Jotta voidaan käyttää hyväksi sitä, että  $I$  on väli, approksimoidaan testijoukkoa  $A$  väleillä seuraavasti:

Jos  $\varepsilon > 0$  on annettu, peitetään  $A$  sellaisilla avoimilla väleillä  $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ , että

$$(6) \quad m^* (A) > \sum_k \lambda (I_k) - \varepsilon.$$

Joukko  $I'_k = I_k \cap I$  on joko  $\emptyset$  tai väli (ks. kuva 3). Joukko  $I''_k = I_k \cap I^c$  ei



KUVA 3. Joukot  $I, I_k, I'_k$  ja  $I''_k$ .

välttämättä ole väli, mutta se voidaan jakaa äärelliseen määrään välejä  $I''_{kj}$ . Selvästi  $\lambda(I_k) = \lambda(I'_k) + \sum_j \lambda(I''_{kj})$ . Lemman 5.2 nojalla

$$\lambda(I_k) = m^*(I'_k) + \sum_j m^*(I''_{kj}).$$

Summaamalla muuttujan  $k$  yli ja käyttämällä ulkomitan subadditiivisuutta saadaan

$$\begin{aligned} \sum_k \lambda(I_k) &= \sum_k m^*(I'_k) + \sum_{k,j} m^*(I''_{kj}) \\ &\geq m^*\left(\bigcup_k I'_k\right) + m^*\left(\bigcup_{k,j} I''_{kj}\right). \end{aligned}$$

Mutta  $\bigcup_k I'_k = (\bigcup_k I_k) \cap I \supset A \cap I$  ja  $\bigcup_{k,j} I''_{kj} = (\bigcup_k I_k) \cap I^c \supset A \cap I^c$ , joten

$$\sum_k \lambda(I_k) \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c).$$

Tällöin epäyhtälön (6) nojalla

$$m^*(A) + \varepsilon \geq m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c),$$

mikä on voimassa aina, kun  $\varepsilon > 0$ , joten ehto (4) on voimassa.  $\square$

**Lemma 5.4.** *Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  avoin joukko  $A$  voidaan esittää yhdisteenä numeroituvasta määrästä erillisiä välejä.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä.  $\square$

**Seuraus 5.5.** *Avaruuden  $\mathbb{R}^n$  kaikki avoimet ja suljetut joukot ovat mitallisia. Lisäksi kaikki Borelin joukot ovat mitallisia.*

TODISTUS. Avoimille joukoille tulos seuraa Lemmasta 5.4 ja Lauseesta 5.3. Olkoon  $B \subset \mathbb{R}^n$  suljettu. Tällöin  $B^c$  on avoin, siis  $B^c \in \mathcal{M}$ , joten  $B = (B^c)^c \in \mathcal{M}$ .

Vastaavasti Borelin joukkoluokka  $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ , sillä  $\mathcal{B}$  on pienin  $\sigma$ -algebra, joka sisältää avoimet joukot.  $\square$

**Essee tehtävä 1.** Ensimmäisessä essee tehtävässä osoitetaan, että on olemassa joukkoja  $F \in \mathcal{M}$ , että  $F \notin \mathcal{B}$ , sekä joukkoja  $A \subset \mathbb{R}$ , jotka eivät ole (Lebesgue-)mitallisia.

Näin on saatu konstruointia avaruuden  $\mathbb{R}^n$  joukoista mitalliset joukot  $\mathcal{M} \subset P(\mathbb{R}^n)$  ja mitta  $m : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ . Kolmikkoa  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, m)$  sanotaan *mitta-avaruudeksi*.

**Lause 5.6.** *Olkoon  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  siirto, ts.  $Tx = x + b$  aina, kun  $x \in \mathbb{R}^n$ , ja  $b \in \mathbb{R}^n$  kiinteä. Tällöin on voimassa:*

- (a)  $m^*(T(A)) = m^*(A)$  aina, kun  $A \in \mathbb{R}^n$ .
- (b) Jos  $E \in \mathcal{M}$ , niin  $T(E) \in \mathcal{M}$ .
- (c)  $m(T(E)) = m(E)$  aina, kun  $E \in \mathcal{M}$ .

TODISTUS. Aloitetaan kohdasta (a). Olkoon  $I \subset \mathbb{R}^n$  väli. Tällöin myös  $T(I)$  on väli ja  $\lambda(T(I)) = \lambda(I)$ . Olkoon nyt  $A \subset \mathbb{R}^n$  ja  $A \subset \bigcup_k I_k$ , missä jokainen  $I_k$  on avoin väli. Tällöin  $T(A) \subset \bigcup_k T(I_k)$  ja

$$m^*(T(A)) \leq \sum_k \lambda(T(I_k)) = \sum_k \lambda(I_k).$$

Siis

$$m^*(T(A)) \leq \inf_{A \subset \cup_k I_k} \sum_k \lambda(I_k) = m^*(A).$$

Toisaalta myös kuvauksen  $T$  käänteiskuvaus  $T^{-1} : x \mapsto x - b$  on siirto, joten  $m^*(A) = m^*(T^{-1}(T(A))) \leq m^*(T(A))$ . Siis

$$m^*(T(A)) = m^*(A).$$

Todistetaan seuraavaksi kohta (b). Olkoon  $E \in \mathcal{M}$ . Koska  $T$  on bijektio, niin jokaiselle  $A \subset \mathbb{R}^n$  on

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(T(T^{-1}(A))) = m^*(T^{-1}(A)) \\ &= m^*(T^{-1}(A) \cap E) + m^*(T^{-1}(A) \cap E^c) \\ &= m^*(T(T^{-1}(A) \cap E)) + m^*(T(T^{-1}(A) \cap E^c)) \\ &= m^*(A \cap T(E)) + m^*(A \cap T(E^c)). \end{aligned}$$

Näin ollen  $T(E) \in \mathcal{M}$ , koska yhtälö (3) on voimassa aina, kun  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Myös  $E = T^{-1}(T(E))$  on mitallinen, jos  $T(E)$  on mitallinen.

Kohta (c) seuraa kohdista (a) ja (b).

□

## LUKU 2

### Integroimisteoriaa

#### 1. Topologisia peruskäsitteitä

Topologian peruskäsite on *avoin joukko*. Metrisessä avaruudessa  $X$  (esim.  $X = \mathbb{R}^n$ ) meillä on käytössä etäisyysmitta  $d$  joka kertoo kahden pisteen välisen etäisyyden. Tällöin avoin pallo on joukko  $B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ . Yleinen joukko  $A \subset X$  on avoin, jos jokaiselle  $x \in A$  löytyy  $r > 0$  siten, että  $B(x, r) \subset A$ .

Tässä meitä kiinnostavat kaksi topologista avaruutta,  $\mathbb{R}$  ja  $\overline{\mathbb{R}}$ . Edellinen on entuudestaan tuttu, ja siinä meillä on  $d(x, y) = |x - y|$ . Jälkimmäinen joukko on reaaliakselin kahden pisteen kompaktifikaatio,  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ . Tässä tapauksessa sovitaan, että pallo  $B(\infty, r)$  on puoliääretön väli  $(r^{-1}, \infty]$  ja pallo  $B(-\infty, r)$  on puoliääretön väli  $[-\infty, -r^{-1})$ .

Joukko  $A$  on pisteen  $x$  *ympäristö* jos se on avoin ja sisältää pisteen  $x$ . Metrisessä avaruudessa voimme määritellä ylä- ja alarajaarvot seuraavasti

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \inf_{A \ni a} \sup_{x \in A} f(x) \quad \text{ja} \quad \liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{A \ni a} \inf_{x \in A} f(x),$$

missä ensimmäinen inf ja sup on otettu yli pisteen  $a$  ympäristöjen. Erityisesti avaruudessa  $\mathbb{N}$  pätee

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_{k \geq i} x_k \quad \text{ja} \quad \liminf_{i \rightarrow \infty} x_i = \lim_{i \rightarrow \infty} \inf_{k \geq i} x_k.$$

Jos  $X$  ja  $Y$  ovat metrisiä avaruuksia niin sanomme kuvausta  $f: X \rightarrow Y$  jatkuvaksi jos alkukuva  $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$  on avoin jokaisella avoimella joukolla  $A \subset Y$ . Harjoitustehtävänä on osoittaa, että tämä määritelmä on ekvivalentti Analyysi I kurssin  $\epsilon$ - $\delta$  määritelmän kanssa.

Jos  $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on funktio, niin riittää sen jatkuvuuden osoittamiseksi tarkistaa, että joukkojen  $(a, \infty]$  ja  $[\infty, a)$  alkukuvat ovat avoimia kaikilla  $a \in \mathbb{R}$  (harjoitustehtävä). Jos funktio toteuttaa ainoastaan ehdon, että  $f^{-1}((a, \infty])$  on avoin kaikilla  $a \in \mathbb{R}$ , niin sitä sanotaan alhaalta puoliavoimeksi. Jos  $f^{-1}([\infty, a))$  on avoin kaikilla  $a \in \mathbb{R}$ , niin funktiota sanotaan ylhäältä puoliavoimeksi.

Joukon  $E \subset X$  *karakteristinen funktio*  $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$  saa määritelmän mukaan arvon 1 joukossa  $E$ , ja 0 muuten. Funktio  $\chi_E$  on alhaalta puolijatkuva jos ja vain jos  $E$  on avoin; vastaavasti, se on ylhäältä puolijatkuva jos ja vain jos  $E$  on suljettu. Jos  $X = \mathbb{R}^n$ , niin  $E$  on avoin ja suljettu ainoastaan jos  $E = \mathbb{R}^n$  tai  $E = \emptyset$ . Nämä ovat siis myös ainoat tapaukset joissa  $\chi_E$  on jatkuva.

#### 2. Mitalliset funktiot

Seuraavaksi määrittelemme jatkuvaa funktiota yleisemmän funktion, joka kuitenkin osoittautuu erittäin toimivaksi integroinnin kannalta. Ideana on korvata edellisen kappaleen jatkuvuuden määritelmässä vaatimuksen, että alkukuva on avoin paljon väljemällä vaatimuksella, että se on mitallinen (jokainen avoin joukkohan on mitallinen).

Seuraavassa  $E \subset \mathbb{R}^n$  on aina mitallinen joukko. (Väittämien kannalta ei usein ole oleellista, että kyse on nimenomaan avaruudesta  $\mathbb{R}^n$ .)

**Määritelmä 2.1.** Funktiota  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sanotaan *mitalliseksi*, jos  $E$  on mitallinen joukko ja joukko  $\{x \in E \mid f(x) > a\}$  on mitallinen aina, kun  $a \in \mathbb{R}$ .

Edellinen määritelmä näyttää vastaavan alhaalta puolijatkuvan funktion määritelmää. Voisi siis ajatella, että saisimme toisen funktioluokan muuttamalla oletusta niin, että  $\{x \in E \mid f(x) < a\}$  onkin avoin. Seuraavan lemmän nojalla näin ei ole.

**Lemma 2.2.** *Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen osajoukko,  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ja  $a \in \mathbb{R}$  mielivaltainen. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- (i) Joukko  $\{x \in E \mid f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ .
- (ii) Joukko  $\{x \in E \mid f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$ .
- (iii) Joukko  $\{x \in E \mid f(x) < a\} \in \mathcal{M}$ .
- (iv) Joukko  $\{x \in E \mid f(x) \leq a\} \in \mathcal{M}$ .

TODISTUS. Selvästi kohdat (i) ja (iv), sekä (ii) ja (iii) ovat keskenään yhtäpitävät, sillä kyseiset joukot ovat toistensa komplementteja aina, kun  $a \in \mathbb{R}$ .

Edelleen (i)  $\Rightarrow$  (ii), sillä

$$\{x \in E \mid f(x) \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) > a - \frac{1}{k}\},$$

ja vastaavasti (ii)  $\Rightarrow$  (i), sillä

$$\{x \in E \mid f(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) \geq a + \frac{1}{k}\}. \quad \square$$

Jos  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen, niin jokaisen avoimen välin  $I = (a, b)$  alkukuva on

$$\begin{aligned} f^{-1}((a, b)) &= \{x \in E \mid a < f(x) < b\} \\ &= \{x \in E \mid f(x) > a\} \cap \{x \in E \mid f(x) < b\}. \end{aligned}$$

Siis avoimen välin alkukuva on kahden mitallisen joukon leikkauksena mitallinen. Jos  $A \subset \mathbb{R}$  on avoin joukko, niin  $A = \cup_k I_k$ , missä joukot  $I_k$  ovat erillisiä avoimia välejä. Tällöin  $f^{-1}(A) = f^{-1}(\cup_k I_k) = \cup_k f^{-1}(I_k)$ , joten  $f^{-1}(A)$  on mitallinen. Siis avoimen joukon alkukuva on mitallinen.

Osoitetaan, että jos  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  on jatkuva ja  $E \in \mathcal{M}$ , niin  $f$  on mitallinen funktio. Jos  $a \in \mathbb{R}$  on mielivaltainen, niin joukko  $A = (a, \infty)$  on avoin. Koska  $f$  on jatkuva, niin joukko  $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$  on avoin joukossa  $E$ . Tällöin  $f^{-1}(A) = U \cap E$ , missä  $U \subset \mathbb{R}^n$  on avoin joukko, joten  $U \cap E$  on mitallinen. Näin ollen  $f^{-1}(A) = \{x \in E \mid f(x) > a\}$  on mitallinen ja  $f$  on mitallinen funktio.

Jos  $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen funktio ja  $D \subset E$  on mitallinen osajoukko, niin funktion  $f$  rajoittuma joukkoon  $D$ ,  $f|_D : D \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , on mitallinen, sillä

$$\{x \in D \mid f|_D(x) > a\} = D \cap \{x \in E \mid f(x) > a\}.$$

**Esimerkki.** Määritellään funktio  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seuraavasti:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Olkoon nyt  $a \in \mathbb{R}$ , jolloin

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } a \geq 1, \\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, & \text{jos } 1 > a \geq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

Koska  $m^*(\mathbb{Q}) = 0$ , niin  $\mathbb{Q}$  on mitallinen joukko, samoin  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^c$ . Siis joukko  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\}$  on mitallinen, joten funktio  $f$  on mitallinen. Jos  $a \in \mathbb{R}$ , niin

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{jos } a \geq 1, \\ A, & \text{jos } 1 > a \geq 0, \\ \mathbb{R}, & \text{jos } a < 0. \end{cases}$$

Siis  $\chi_A$  on mitallinen jos ja vain jos  $A$  on mitallinen joukko.

**Lause 2.3.** *Olkoot  $f$  ja  $g$  mitallisia funktioita  $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ja olkoon  $c \in \mathbb{R}$ . Tällöin*

- (a)  $f \pm g$  ja  $fg$  (mikäli määritellyt) ovat mitallisia funktioita.  
 (b)  $|f|$ ,  $f^+ := \max\{f, 0\}$  ja  $f^- := -\min\{f, 0\}$  ovat mitallisia funktioita.

Tässä edellytetään, ettei esimerkiksi  $f(x) + g(x) = +\infty + (-\infty)$ .

TODISTUS. Harjoituksissa osoitetaan funktiot  $f + g$  ja  $fg$  mitallisiksi. Tarkastellaan tässä yksinkertaisempaa tapausta, nimittäin funktiota  $f + c$ . Koska

$$\{x \in E \mid f(x) + c > a\} = \{x \in E \mid f(x) > a - c\},$$

on  $f + c$  mitallinen. Vastaavasti funktiolle  $cf$  saadaan

$$\{x \in E \mid cf(x) > a\} = \begin{cases} \{x \in E \mid f(x) > \frac{a}{c}\}, & \text{jos } c > 0, \\ \{x \in E \mid f(x) < \frac{a}{c}\}, & \text{jos } c < 0, \\ E \text{ tai } \emptyset, & \text{jos } c = 0. \end{cases}$$

Siis funktio  $cf$  on mitallinen.

Itseisarvon määritelmän nojalla pätee

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jos } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{jos } f(x) < 0. \end{cases}$$

Jos  $a < 0$ , niin

$$\{x \in E \mid |f(x)| \leq a\} = \emptyset$$

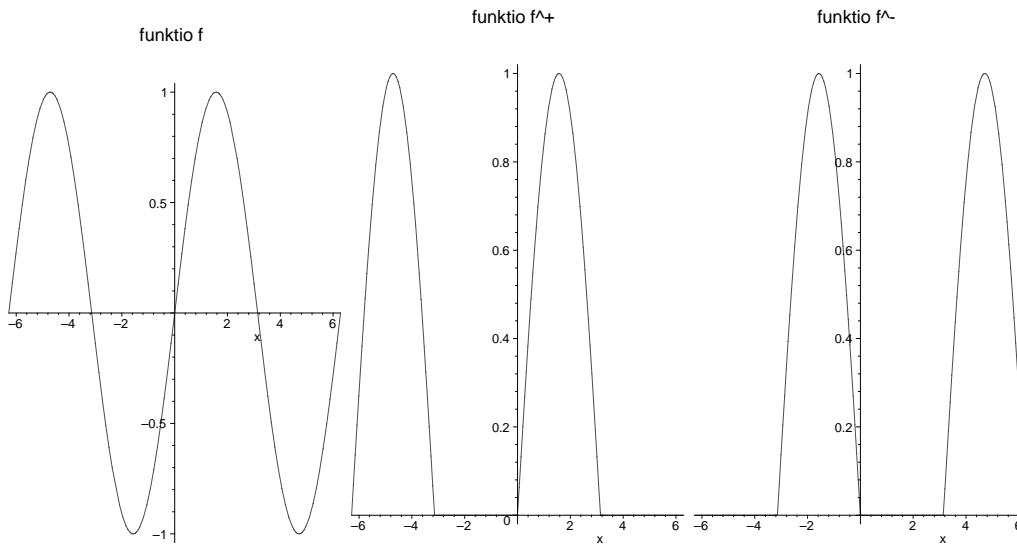
ja jos  $a \geq 0$ , niin

$$\{x \in E \mid |f(x)| \leq a\} = \{x \in E \mid f(x) \leq a\} \cap \{x \in E \mid f(x) \geq -a\}.$$

Näin ollen  $|f|$  on mitallinen aina, kun  $f$  on mitallinen.

Kaikilla  $x \in E$  on  $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$  ja  $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$  ja vastaavasti  $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$  ja  $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$ . Siis  $f^+(x)$  ja  $f^-(x)$  ovat mitallisia edellisten kohtien nojalla, jos  $f(x)$  on mitallinen.  $\square$

**Lause 2.4.** *Olkoon  $(f_n)_{k=1}^\infty$  jono mitallisia funktioita:  $E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Tällöin funktiot  $\sup_k f_k$ ,  $\inf_k f_k$ ,  $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k$  ja  $\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$  ovat mitallisia.*



KUVA 1. Funktiot  $f = \sin(x)$ ,  $f^+$  ja  $f^-$

TODISTUS. Merkitään  $g(x) := \sup_n f_k(x)$ ,  $x \in E$ . Jos  $a \in \mathbb{R}$ , niin

$$\{x \in E \mid g(x) > a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f_k(x) > a\}.$$

Siis  $g$  on mitallinen, jos  $f_n$  on mitallinen aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

Vastaavasti funktiolle  $h(x) := \inf_k f_k(x)$ ,  $x \in E$ , on

$$\{x \in E \mid h(x) < a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in E \mid f_k(x) < a\}$$

aina, kun  $a \in \mathbb{R}$ . Täten  $h$  on mitallinen, jos  $f_k$  on mitallinen aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Harjoituksena on osoittaa, että

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \inf_i \left\{ \sup_{k \geq i} f_k(x) \right\} \text{ ja } \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_i \left\{ \inf_{k \geq i} f_k(x) \right\}$$

aina, kun  $x \in E$ . Tällöin rajafunktiot ovat mitallisia edelläolevan päättelyn nojalla.  $\square$

**Määritelmä 2.5.** Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen joukko. Jos  $P$  on jokin ominaisuus, joka on voimassa kaikissa joukon  $E$  pisteissä lukuunottamatta joukkoa  $A \subset E$ , jolle  $m^*(A) = 0$ , niin sanotaan, että  $P$  on voimassa *melkein kaikkialla* (m.k.) joukossa  $E$ .

**Esimerkki.**  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ , jos  $f(x) = g(x)$  m.k. joukossa  $E$ , ts. jos

$$m^*(\{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Olkoot  $g(x) = 0$  aina, kun  $x \in \mathbb{R}$ , ja

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tällöin  $f = g$  m.k. joukossa  $\mathbb{R}$ .

$f_n \rightarrow f$  m.k. joukossa  $E$  jos ja vain jos

$$m^*(E \setminus \{x \in E \mid f_n(x) \rightarrow f(x)\}) = 0.$$

**Lause 2.6.** *Olkoon  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mitallinen funktio ja olkoon  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ . Tällöin myös  $g$  on mitallinen funktio.*

TODISTUS. Merkitään  $A = \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$ . Siis  $m^*(A) = 0$ , joten  $A$  on mitallinen. Tällöin joukko

$$\{x \in E \mid g(x) < a\} = \{x \in E \cap A^c \mid f(x) < a\} \cup \{x \in A \mid g(x) < a\}$$

on mitallinen aina, kun  $a \in \mathbb{R}$ . Näin ollen  $g$  on mitallinen funktio.  $\square$

**Huomautus.** Yleensä sallitaan edellisen lauseen tapaisissa väitteissä myös tilanne jossa  $g$  ei ole edes määritelty joukossa  $A$ .

**Lause 2.7** (Egoroffin Lause). *Olkoon  $E \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen joukko, jolle  $m(E) < \infty$  ja olkoon  $(f_k)_{k=1}^\infty$  jono sellaisia mitallisia funktioita  $E \rightarrow \mathbb{R}$ , että  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  m.k. joukossa  $E$ . Tällöin jokaista lukua  $\delta > 0$  kohti on olemassa sellainen mitallinen joukko  $E_0 \subset E$ , että  $m(E_0) < \delta$  ja  $f_n \rightarrow f$  tasaisesti joukossa  $E \setminus E_0 = E \cap E_0^c$ .*

TODISTUS. Olkoot  $\delta > 0$  ja  $k \in \mathbb{Z}_+$  mielivaltaisia. Merkitään

$$G_m^k = \{x \in E \mid |f_m(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Selvästi  $G_m^k$  on mitallinen joukko aina, kun  $m, k \in \mathbb{Z}_+$ . Merkitään

$$E_p^k := \bigcup_{m=p}^\infty G_m^k = \{x \in E \mid \exists i \geq p \text{ s.e. } |f_i(x) - f(x)| \geq \frac{1}{k}\}.$$

Jos  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , niin on olemassa sellainen  $p$ , että  $x \notin E_p^k$ . Siis

$$\bigcap_{p=1}^\infty E_p^k \subset E \setminus \{x \in E \mid f_n(x) \rightarrow f(x)\}.$$

Koska  $f_n \rightarrow f$  m.k. joukossa  $E$  ja  $E_p^k \supset E_{p+1}^k \supset \dots$ , niin  $m(\bigcap_{p=1}^\infty E_p^k) = 0$ . Lauseen 2.4 (e) nojalla

$$0 = m\left(\bigcap_{p=1}^\infty E_p^k\right) = \lim_{p \rightarrow \infty} m(E_p^k).$$

On siis olemassa sellainen  $p_k \in \mathbb{Z}_+$ , että

$$m(E_p^k) < \frac{\delta}{2^k} \quad \text{aina, kun } p \geq p_k.$$

Merkitään  $E_0 := \bigcup_{k=1}^\infty E_{p_k}^k$ , jolloin  $E_0$  on mitallinen joukko ja

$$m(E_0) \leq \sum_{k=1}^\infty m(E_{p_k}^k) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

On enää osoitettava, että  $f_n \rightarrow f$  tasaisesti joukossa  $E \setminus E_0$ . Olkoot  $\varepsilon > 0$  ja  $x \in E \setminus E_0$  mielivaltaisia. Valitaan aluksi sellainen  $s \in \mathbb{Z}_+$ , että  $\frac{1}{s} < \varepsilon$ . Siis  $x \in E \cap \{\bigcup_{k=1}^\infty E_{p_k}^k\}^c = E \cap \{\bigcap_{k=1}^\infty (E_{p_k}^k)^c\} \subset (E_{p_s}^s)^c$ . Toisin sanoen  $x \notin E_{p_s}^s$ , joten

$$|f_i(x) - f(x)| < \frac{1}{s} < \varepsilon \quad \text{aina, kun } i \geq p_s.$$

Siis  $f_i \rightarrow f$  tasaisesti joukossa  $E \setminus E_0$ .  $\square$

**Esimerkki.** Olkoon  $E = [0, 1]$  ja  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i(x) = x^i$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Tällöin

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x^i = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \in [0, 1[, \\ 1, & \text{jos } x = 1. \end{cases}$$

Siis  $f_i(x) \rightarrow 0$  m.k. välillä  $[0, 1]$ . Olkoon  $\delta > 0$  ja merkitään  $E_0 = ]1 - \delta, 1]$ . Nyt  $E \setminus E_0 = [0, 1 - \delta]$  ja  $x^i \rightarrow 0$  tasaisesti tällä välillä, sillä

$$|x^i - 0| = |x^i| \leq (1 - \delta)^i \rightarrow 0 \quad \text{aina, kun } x \in [0, 1 - \delta].$$

### 3. Lebesguen integraali yksinkertaiselle funktiolle

**Määritelmä 3.1.** Funktiota  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sanotaan *yksinkertaiseksi*, jos

$$(7) \quad \varphi(x) = \sum_{i=1}^p a_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R}^n,$$

missä  $E_1, \dots, E_p \subset \mathbb{R}^n$  ovat mitallisia joukkoja ja  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i \geq 0$  aina, kun  $i = 1, \dots, p$ . Merkitään

$$Y = \{\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ yksinkertainen}\}.$$

Esitys (7) ei ole yksikäsitteinen, sillä ei oleteta, että joukot  $E_i$  olisivat erillisiä.

Jos  $\varphi \in Y$ , niin selvästi  $\varphi$  on mitallinen ja sen arvojoukko  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  on äärellinen. Yksinkertaisella funktiolla on aina ns. *normaaliesitys*

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}(x) \quad \text{aina, kun } x \in \mathbb{R}^n,$$

missä  $A_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = c_i\}$ ,  $i = 1, \dots, p$ ,  $\mathbb{R}^n = \cup_{i=1}^p A_i$  sekä  $c_i \neq c_j$  ja  $A_i \cap A_j = \emptyset$  aina, kun  $i \neq j$ . Normaaliesitys on yksikäsitteinen.

**Esimerkki.** Määritellään  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  seuraavasti:

$$\varphi(x) = 1 \cdot \chi_{[0,1]}(x) + 2 \cdot \chi_{[0,2]}(x) + 3 \cdot \chi_{[2,4]}(x).$$

Tällöin funktion  $\varphi$  arvojoukko on  $\{2, 3, 5, 0\}$  ja sen normaaliesitys on

$$\varphi(x) = 0 \cdot \chi_{(-\infty, 0) \cup (4, \infty)}(x) + 2 \cdot \chi_{(1, 2)}(x) + 3 \cdot \chi_{[0, 1] \cup ]2, 4]}(x) + 5 \cdot \chi_{\{2\}}(x).$$

**Määritelmä 3.2.** Olkoon  $f \in Y$  ja  $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$  sen normaaliesitys. Jos  $E \subset \mathbb{R}^n$  on mitallinen joukko, niin funktion  $f$  (Lebesguen) *integraali yli joukon E* on:<sup>1</sup>

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^p c_i m(A_i \cap E).$$

Jos erityisesti  $E = \mathbb{R}^n$ , niin merkitään  $I(f, \mathbb{R}^n) =: I(f)$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen joukko ja

$$f(x) = \chi_A(x) = 0 \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus A}(x) + 1 \cdot \chi_A(x).$$

Tällöin  $I(f) = 0 \cdot m(\mathbb{R}^n \setminus A) + 1 \cdot m(A) = m(A)$ . Jos  $E$  on mielivaltainen mitallinen joukko, niin  $I(f, E) = 0 \cdot m(\mathbb{R}^n \setminus (A \cap E)) + 1 \cdot m(A \cap E) = m(A \cap E)$ .

Olkoon  $\varphi(x)$  kuten edellisessä esimerkissä, tällöin

$$\begin{aligned} I(f) &= 2 \cdot m((1, 2)) + 3 \cdot m([0, 1] \cup ]2, 4]) + 5 \cdot m(\{2\}) \\ &= 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 0 = 2 + 9 = 11. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Sopimus:  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Lause 3.3.** Jos  $f \in Y$  ja  $f = \sum_{j=1}^q a_j \chi_{B_j}$ , missä  $B_j \cap B_i = \emptyset$  aina, kun  $i \neq j$ , niin

$$I(f, E) = \sum_{j=1}^q a_j m(B_j \cap E) \quad \text{aina, kun } E \in \mathcal{M}.$$

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

**Lause 3.4.** Olkoon  $f \in Y$  ja  $\{E_k\}_k$  korkeintaan numeroituva perhe erillisiä mitallisia joukkoja. Tällöin

$$I\left(f, \bigcup_k E_k\right) = \sum_k I(f, E_k).$$

TODISTUS. Olkoon  $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$  funktion  $f$  normaaliesitys. Tällöin

$$\begin{aligned} I\left(f, \bigcup_k E_k\right) &= \sum_{i=1}^p c_i m\left(\bigcup_k (A_i \cap E_k)\right) \\ &= \sum_{i=1}^p c_i \left(\sum_k m(A_i \cap E_k)\right) \\ &= \sum_k \sum_{i=1}^p c_i m(A_i \cap E_k) \\ &= \sum_k I(f, E_k). \end{aligned} \quad \square$$

**Lause 3.5.** Olkoon  $f \in Y$  ja  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  mitallisia. Tällöin

- (a)  $I(f, E) \leq I(f, F)$ , jos  $E \subset F$ .  
 (b)  $I(f, E) = 0$ , jos  $m(E) = 0$ .

TODISTUS. Jos  $E \subset F$ , niin  $F = E \cup (F \cap E^c)$ . Lauseen 3.4 nojalla

$$I(f, F) = I(f, E) + I(f, F \cap E^c) \geq I(f, E).$$

Jos  $m(E) = 0$ , niin  $m(E \cap A) = 0$  aina, kun  $A \in \mathcal{M}$ . Jos  $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$  on funktion  $f$  normaaliesitys, niin

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^p c_i m(E \cap A_i) = 0. \quad \square$$

**Lause 3.6.** Olkoot  $f, g \in Y$ ,  $E \in \mathcal{M}$  ja  $\alpha, \beta \in [0, \infty[$ . Tällöin

- (a)  $\alpha f + \beta g \in Y$  ja  $I(\alpha f + \beta g, E) = \alpha I(f, E) + \beta I(g, E)$ .  
 (b)  $I(f, E) \leq I(g, E)$ , jos  $f \leq g$  joukossa  $E$ .

TODISTUS. Koska selvästi  $\alpha f + \beta g \geq 0$  on mitallinen ja se saa äärellisen määrän eri arvoja, niin se on yksinkertainen funktio. Olkoot  $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$ ,  $g = \sum_{j=1}^q d_j \chi_{B_j}$  funktioiden normaaliesitykset. Tällöin jokaisella  $x \in A_i \cap B_j$  on  $\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha c_i + \beta d_j$  ja siis

$$\alpha f + \beta g = \sum_{i,j} (\alpha c_i + \beta d_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

missä perhe  $\{A_i \cap B_j\}_{i,j}$  koostuu erillisistä joukoista. Lauseen 3.3 perusteella

$$I(\alpha f + \beta g, E) = \sum_{i,j} (\alpha c_i + \beta d_j) m((A_i \cap B_j) \cap E).$$

Koska nyt  $\cup_{i=1}^p A_i = \mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^q B_j$  ja  $\mathbb{R}^n = (\cup A_i) \cap (\cup B_j) = \cup_{i,j} (A_i \cap B_j)$ , niin saadaan

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g, E) &= \alpha \sum_{i=1}^p c_i \sum_{j=1}^q m((A_i \cap B_j) \cap E) + \beta \sum_{j=1}^q d_j \sum_{i=1}^p m((A_i \cap B_j) \cap E) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^p c_i m((A_i \cap \mathbb{R}^n) \cap E) + \beta \sum_{j=1}^q d_j m((\mathbb{R}^n \cap B_j) \cap E) \\ &= \alpha I(f, E) + \beta I(g, E). \end{aligned}$$

Todistetaan seuraavaksi toinen väite. Jos  $f \leq g$  joukossa  $E$ , niin

$$\begin{aligned} I(f, E) &= \sum_{i=1}^p c_i m(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^p c_i m\left((A_i \cap E) \cap \left(\bigcup_{j=1}^q B_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^p c_i \sum_{j=1}^q m(A_i \cap E \cap B_j) = \sum_{i,j} c_i m(A_i \cap B_j \cap E) \\ &\leq \sum_{i,j} d_j m(A_i \cap B_j \cap E) = \dots = I(g, E). \end{aligned} \quad \square$$

#### 4. Integraali ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle

Integraalin määrittely perustuu approksimointi-ideaan, kun osaamme integroida yksinkertaista funktiota, niin mielivaltaisen (mitallisen) funktion integraali saadaan ottamalla yksinkertainen funktio joka on mahdollisimman iso, mutta annettua funktiota pienempi, ja integroidaan sita.

**Määritelmä 4.1.** Olkoon  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$   $\mu$ -mitallinen funktio. Asetetaan

$$\int_E f d\mu := \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \varphi \leq f}} I(\varphi, E),$$

missä  $E \subset A$  on mitallinen joukko ja  $\varphi \leq f$  joukossa  $E$ .

**Huomautus.** Määritelmän mukaan  $\int_E f \in [0, \infty]$ .

- (1) Jokaista mitallista funktiota  $f \geq 0$  kohti on olemassa yksinkertaisia funktioita  $\varphi$ , joille  $0 \leq \varphi \leq f$  (esimerkiksi  $\varphi = 0$  tai Lause 5.1).
- (2) Jos  $f$  itse on yksinkertainen funktio, niin määritelmä antaa tuloksen

$$\int_E f d\mu = \sup_{\varphi \leq f} I(\varphi, E) = I(f, E).$$

**Esimerkki.** Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{jos } x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Nyt  $f$  on mitallinen ja yksinkertainen funktio. Lasketaan  $\int_{[0,1]} f d\mu$ :

$$\int_{[0,1]} f d\mu = 1 \cdot m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 0 \cdot m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 0.$$

Tämä funktio *ei ole* Riemannin mielessä integroitava.

Seuraavassa lauseessa todistetaan integraalin perusominaisuudet ei-negatiivisille mitallisille funktioille.

**Lause 4.2.** *Olkoot  $E, F \subset \mathbb{R}^n$  mitallisia joukkoja, sekä  $f$  ja  $g$  ei-negatiivisia mitallisia funktioita. Tällöin on voimassa:*

- (a) *Jos  $f \leq g$  joukossa  $E$ , niin  $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$ .*
- (b) *Jos  $E \subset F$ , niin  $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$ .*
- (c) *Jos  $f(x) = 0$  aina, kun  $x \in E$ , niin  $\int_E f d\mu = 0$ .*
- (d) *Jos  $m(E) = 0$ , niin  $\int_E f d\mu = 0$ .*
- (e) *Jos  $0 \leq \alpha < \infty$ , niin  $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ .*

TODISTUS. (a) Olkoon  $f \leq g$  joukossa  $E$ . Tällöin

$$\int_E f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in Y}} I(\varphi, E) \leq \sup_{\substack{\varphi \leq g \\ \varphi \in Y}} I(\varphi, E) = \int_E g d\mu.$$

(b) Harjoitustehtävä.

- (c) Olkoon  $f(x) = 0$  aina, kun  $x \in E$ . Tällöin  $0 \leq \varphi \leq f = 0$  joukossa  $E$ , eli  $\varphi = 0$ . Näin ollen  $I(\varphi, E) = 0$ , , aina, kun  $0 \leq \varphi \leq f$ , joten  $\int_E f d\mu = 0$ .
- (d) Olkoon  $m(E) = 0$  ja  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen. Lauseen 3.5 (b) nojalla  $I(\varphi, E) = 0$  aina, kun  $\varphi \in Y$ . Tällöin

$$\int_E f d\mu = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in Y}} I(\varphi, E) = 0.$$

- (e) Olkoon  $0 \leq \alpha < \infty$  ja  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen. Jos  $\alpha = 0$ , niin väite seuraa kohdasta (c). Olkoon siis  $\alpha > 0$ . Jos  $\varphi \in Y$  ja  $\varphi \leq f$  joukossa  $E$ , niin  $\alpha\varphi \in Y$  ja  $\alpha\varphi \leq \alpha f$  joukossa  $E$ . Lauseen 3.6 nojalla  $\alpha I(\varphi, E) = I(\alpha\varphi, E) \leq \int_E \alpha f d\mu$ , joten

$$\begin{aligned} \alpha \int_E f d\mu &= \alpha \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in Y}} I(\varphi, E) = \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi \in Y}} I(\alpha\varphi, E) \\ &= \sup_{\substack{\alpha\varphi \leq \alpha f \\ \alpha\varphi \in Y}} I(\alpha\varphi, E) = \sup_{\substack{\psi \leq \alpha f \\ \psi \in Y}} I(\psi, E) \\ &= \int_E \alpha f d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

**Lause 4.3.** *Olkoon  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen funktio, jolle*

$$\int_E f d\mu < \infty.$$

*Tällöin  $0 \leq f(x) < \infty$  m.k. joukossa  $E$ .*

TODISTUS. Merkitään  $A = \{x \in E \mid f(x) = +\infty\}$ . Nyt  $A$  on mitallinen, sillä  $A = f^{-1}(\{+\infty\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E \mid f(x) > n\}$ . Lisäksi  $k\chi_A$  on yksinkertainen funktio aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Edelleen  $k\chi_A \leq f$  joukossa  $E$ , ja

$$\infty > \int_E f d\mu \geq I(k\chi_A, E) = k m(A) \quad \text{aina, kun } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Siis välttämättä  $m(A) = 0$ . □

**Lause 4.4.** *Olkoon  $f$  ja  $g : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallisia funktioita. Jos  $f = g$  m.k. joukossa  $E$ , niin*

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu.$$

TODISTUS. Olkoon  $A \subset E$  ja  $m(A) = 0$ . Olkoon lisäksi  $f, g : E \rightarrow [0, \infty]$  sellaisia mitallisia funktioita, että  $f(x) = g(x)$  aina, kun  $x \in E \cap A^c$ . Tällöin

$$\int_E f d\mu = \int_{E \cap A^c} f d\mu + \int_A f d\mu = \int_{E \cap A^c} g d\mu = \int_E g d\mu. \quad \square$$

**Lause 4.5.** *Olkoon  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen funktio. Jos  $\int_E f d\mu = 0$ , niin  $f = 0$  m.k. joukossa  $E$ .*

TODISTUS. Merkitään  $A := \{x \in E \mid f(x) > 0\}$  ja oletetaan, että  $m(A) > 0$ . Jos jokaisella  $k \in \mathbb{Z}_+$  asetetaan

$$E_k := \left\{x \in E \mid f(x) > \frac{1}{k}\right\},$$

niin  $E_k \subset E_{k+1}$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ . Siis Lauseen 2.4 nojalla  $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = m(A) > 0$ , joten

$$0 = \int_E f d\mu \geq \int_{E_k} f d\mu \geq \int_{E_k} \frac{1}{k} d\mu = \frac{1}{k} m(E_k) > 0,$$

kun  $k$  on riittävän suuri. Tästä seuraa ristiriita, joten  $m(A) = 0$ .  $\square$

## 5. Keskeiset raja-arvotulokset ei-negatiiviselle mitalliselle funktiolle

Tässä kappaleessa todistamme muutaman keskeisen tuloksen Lebesgue integraalin hyvästä käyttäytymisestä raja-arvon oton suhteen.

**Lause 5.1.** *Olkoon  $A \subset \mathbb{R}^n$  mitallinen joukko ja  $f : A \rightarrow [0, \infty]$  annettu funktio. Tällöin  $f$  on mitallinen jos ja vain jos on olemassa sellainen funktiojono  $(f_i)_{i=1}^{\infty} \subset Y$ , että  $f_i(x) \leq f_{i+1}(x)$  aina, kun  $x \in A$  ja  $i \in \mathbb{Z}_+$ , sekä  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$  aina, kun  $x \in A$ .*

TODISTUS. Jos edellä mainittu jono  $(f_i)$  on olemassa, niin Lauseen 2.4 nojalla rajafunktio  $f$  on mitallinen. Olkoon siis  $f : A \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen funktio. Konstruoidaan funktiojono  $(f_i)_{i=1}^{\infty} \subset Y$  seuraavasti:

$f_1$ : Väli  $[0, 1]$  jaetaan väleihin (ks. kuva 2)

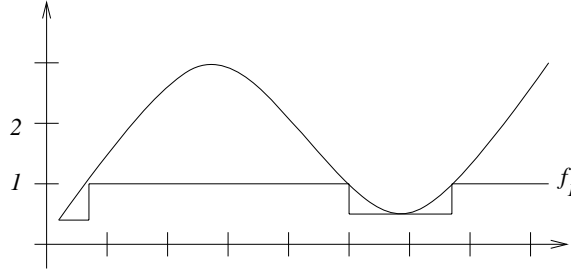
$$V_{1j} = \left[\frac{j-1}{2}, \frac{j}{2}\right], \quad 1 \leq j \leq 2,$$

ja asetetaan

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2}, & \text{jos } x \in f^{-1}(V_{1j}), j = 1, 2, \\ 1, & \text{jos } x \in f^{-1}([1, \infty]). \end{cases}$$

$f_i, i \geq 2$ : Väli  $[0, i]$  jaetaan erillisiin osiin

$$V_{ij} = \left[\frac{j-1}{2^i}, \frac{j}{2^i}\right], \quad 1 \leq j \leq i2^i,$$

KUVA 2. Funktio  $f_1$ .

ja asetetaan

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{j-1}{2^i}, & \text{jos } \frac{j-1}{2^i} \leq f(x) < \frac{j}{2^i}, \quad j = 1, \dots, i2^i, \\ i, & \text{jos } f(x) \geq i. \end{cases}$$

Selvästi  $f_i(x) \in Y$  ja  $f_i(x) \leq f_{i+1}(x) \leq f(x)$  aina, kun  $x \in A$  ja  $i \in \mathbb{Z}_+$ . Jos  $f(x) < \infty$ , niin valitsemalla  $i_0 \geq f(x)$  saadaan  $f(x) - \frac{1}{2^i} \leq f_i(x) \leq f(x)$  aina, kun  $i \geq i_0$ . Täten  $f_i(x) \rightarrow f(x)$ . Jos taas  $f(x) = +\infty$ , niin  $f_i(x) = i$  aina, kun  $i \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $f_i(x) \rightarrow +\infty$ , kun  $i \rightarrow \infty$ . Siis  $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(x) = f(x)$ , aina, kun  $x \in A$ , ja  $(f_i)_{i=1}^\infty$  täyttää lauseen ehdot.  $\square$

Lause 5.1 nojalla olisi ollut mahdollista määritellä ei-negatiivisen mitallisen funktion  $f : A \rightarrow [0, \infty]$  integraalin yli joukon  $E \subset A$  raja-arvona

$$\int_E f \, d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} I(f_i, E).$$

Tällöin olisi kuitenkin pitänyt osoittaa, että raja-arvo on hyvin määritelty, eli, että se ei riipu approksimoivasta funktiojonosta.

**Lause 5.2** (Lebesguen MS-lause). *Olkoon  $(f_k)_{k=1}^\infty : E \rightarrow [0, \infty]$  jono sellaisia mitallisia funktioita, että  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  aina, kun  $x \in E$  ja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Tällöin*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k \, d\mu.$$

TODISTUS. Todetaan aluksi, että yhtälön molemmat puolet ovat määritellyt. Koska  $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$  aina, kun  $x \in E$ , niin Lauseen 4.2 (a) nojalla

$$0 \leq \int_E f_k \, d\mu \leq \int_E f_{k+1} \, d\mu.$$

Täten  $(\int_E f_k)_{k=1}^\infty$  on kasvava reaalilukujono, jolla on raja-arvo

$$\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mu \in [0, \infty].$$

Toisaalta lukujono  $(f_k(x))_{k=1}^\infty$  on kasvava ja rajafunktio

$$f(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sup_k f_k(x) \geq f_k(x) \geq 0$$

on myös mitallinen ja integraali on siis määritelty. Täten yhtälön molemmat puolet ovat määritellyt. Edelläolevan nojalla  $f_k(x) \leq f(x)$  aina, kun  $x \in E$  ja  $k \in \mathbb{Z}_+$ , joten

$$\int_E f_k \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu \quad \text{aina, kun } k \in \mathbb{Z}_+,$$

ja siis

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \sup_k \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu.$$

Riittää enää osoittaa, että  $\alpha \geq \int_E f d\mu$ . Olkoon  $0 \leq \beta < 1$  mielivaltainen ja olkoon  $\varphi \in Y$  sellainen, että  $\varphi \leq f$  joukossa  $E$ . Merkitään

$$E_k := \{x \in E \mid f_k(x) \geq \beta\varphi(x)\}, \quad \text{aina, kun } k = 1, 2, \dots$$

Selvästi joukot  $E_k$  ovat mitallisia ja  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ , sekä  $\cup_{k=1}^{\infty} E_k = E$ . Näin ollen saadaan

$$\int_E f_k d\mu \geq \int_{E_k} f_k d\mu \geq \int_{E_k} \beta\varphi d\mu = \beta \int_{E_k} \varphi d\mu.$$

Harjoitustehtävänä on osoittaa, että jos  $\varphi \in Y$  ja  $(A_k)_{k=1}^{\infty}$  on jono sellaisia mitallisia joukkoja, että  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ , niin

$$I\left(\varphi, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(\varphi, A_k).$$

Siis

$$\alpha = \sup_k \int_E f_k d\mu \geq \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} \varphi d\mu = \beta \int_E \varphi d\mu = \beta I(\varphi, E)$$

aina, kun  $\varphi \in Y$  ja  $\varphi \leq f$ , joten

$$\alpha \geq \beta \sup_{\substack{\varphi \in Y \\ \varphi \leq f}} I(\varphi, E) = \beta \int_E f d\mu.$$

Kun  $\beta \rightarrow 1-$ , niin saadaan lopulta  $\alpha \geq \int_E f d\mu$  ja lause on todistettu.  $\square$

**Lemma 5.3.** *Olkoot  $f, g : E \rightarrow [0, \infty]$  mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_E f + g d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu.$$

**TODISTUS.** Olkoot  $(\varphi_k)$  ja  $(\psi_k)$  Lauseen 5.1 jonot funktioille  $f$  ja  $g$ . Tällöin jono  $(\varphi_k + \psi_k)_{k=1}^{\infty}$  on kasvava ja

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi_k(x) + \psi_k(x)) = f(x) + g(x).$$

Lebesguen MS-lauseen nojalla

$$\begin{aligned} \int_E f + g d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k + \psi_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_E \varphi_k d\mu + \int_E \psi_k d\mu \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \varphi_k d\mu + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

Induktiolla tulos yleistyy  $m$ :lle funktiolle

$$\int_E \sum_{k=1}^m f_k d\mu = \sum_{k=1}^m \int_E f_k d\mu.$$

Induktiolla saadaan kuitenkin aina vain äärellisiä joukkoja koskevia tuloksia. Induktiopäätely voidaan kuitenkin usein yhdistää sopivalla tavalla raja-arvopäätelyyn ja näin johtaa vastaava numeroituva tulos. Näin menetellään seuraavaksi e.m. yhtälölle.

**Lause 5.4.** Olkoon  $(f_k)_{k=1}^{\infty} : E \rightarrow [0, \infty]$  jono mitallisia funktioita. Tällöin

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu.$$

TODISTUS. Jos  $n \in \mathbb{Z}_+$  on mielivaltainen, niin funktio  $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$  on mitallinen,  $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots$  ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

on olemassa ja on mitallinen funktio. Lebesguen MS-lauseen ja edellisen huomautuksen nojalla

$$\begin{aligned} \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) d\mu &= \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu. \end{aligned} \quad \square$$

**Lause 5.5** (Fatoun Lemma). Olkoon  $(f_k)_{k=1}^{\infty} : E \rightarrow [0, \infty]$  jono mitallisia funktioita. Tällöin

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

TODISTUS. Asetetaan  $g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x)$  aina, kun  $x \in E$ . Tällöin  $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$  aina, kun  $x \in E$  ja  $n \in \mathbb{Z}_+$ , joten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \sup_n g_n(x) = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k(x) = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(x).$$

Lebesguen MS-lausetta voidaan soveltaa jonoon  $g_n$ , jolloin

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu.$$

Koska  $\int_E g_n \leq \int_E g_{n+1}$  aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ , niin  $(\int_E g_n)_{n=1}^{\infty}$  on kasvava lukujono ja raja-arvo on olemassa. Lisäksi

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \sup_n \inf_{k \geq n} \int_E g_k d\mu \\ &\leq \sup_n \inf_{k \geq n} \int_E f_k d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu, \end{aligned}$$

sillä  $g_k(x) = \inf_{j \geq k} f_j(x) \leq f_k(x)$  aina, kun  $k \in E$ . Näin ollen

$$\int_E \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E g_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu. \quad \square$$

**Esimerkki.** Olkoon

$$f_k(x) = k\chi_{(0, \frac{1}{k})}(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \leq 0 \text{ tai } x \geq \frac{1}{k}, \\ k, & \text{jos } 0 < x < \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Tällöin  $f_k(x) \rightarrow 0$  aina, kun  $x \in [0, 1]$ , mutta

$$\int_{[0,1]} f_k(x) dx = k \cdot m\left(\left(0, \frac{1}{k}\right)\right) = k \cdot \frac{1}{k} = 1 \quad \text{aina, kun } k \in \mathbb{Z}_+.$$

Siis

$$\int_{[0,1]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k dx = 0 < 1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k dx.$$

**Lause 5.6. (a)** Olkoon  $\{E_k\}$  perhe erillisiä joukkoja ja  $f : \cup_k^\infty E_k \rightarrow [0, \infty]$  mitallinen funktio. Tällöin

$$\int_{\cup_k^\infty E_k} f d\mu = \sum_k \int_{E_k} f d\mu.$$

**(b)** Olkoon  $\{E_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}$  kasvava tai vähenevä jono ja  $f$  mitallinen joukossa  $\cup E_k$ . Jos  $E_k$  on vähenevä, oletetaan lisäksi, että  $\int_{E_k} f d\mu < \infty$  jollain  $k$ . Tällöin

$$\int_{\lim_{k \rightarrow \infty} E_k} f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f d\mu.$$

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

## 6. Mitallisen funktion integraali

Funktiolla  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on aina esitys

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) \text{ aina, kun } x \in E,$$

missä

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\{0, f(x)\}, \\ f^-(x) &= \max\{0, -f(x)\} = -\min\{0, f(x)\}. \end{aligned}$$

Lisäksi

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \text{ aina, kun } x \in E.$$

Funktio  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen, jos ja vain jos  $f^+$  ja  $f^-$  ovat mitallisia (miten tämä todistetaan?). Näin ollen mitalliselle funktionille  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integraalit  $\int_E f^+ d\mu$  ja  $\int_E f^- d\mu$  ovat määritellyt ja ovat välin  $[0, \infty]$  lukuja.

Näin saadaan funktion  $f$  integraalille yli joukon  $E$  "luonnollinen" määritelmä

$$\int_E f d\mu := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Tässä kuitenkin tapausta  $+\infty - (+\infty)$  ei ole määritelty, joten rajoitetaan tarkasteltujen funktioiden joukkoa seuraavasti:

**Määritelmä 6.1.** Jos  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen ja

$$\int_E f^+ d\mu < \infty \quad \text{TAI} \quad \int_E f^- d\mu < \infty$$

niin määrittelemme funktion integraalin kaavalla

$$\int_E f := \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu.$$

Funktiota sanotaan *integroituva*ksi (tai *Lebesgue-integroituva*ksi) jos

$$\int_E f^+ d\mu < \infty \quad \text{JA} \quad \int_E f^- d\mu < \infty$$

**Lause 6.2.** Funktio  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on integroituva yli joukon  $E$  jos ja vain jos  $f$  on mitallinen ja  $\int_E |f| < \infty$ . Tällöin lisäksi

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f| \, d\mu.$$

TODISTUS. Funktio  $f$  on integroituva yli joukon  $E$  jos ja vain jos se on mitallinen ja  $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$  ja  $\int_E f^- \, d\mu < \infty$ . Mutta  $|f| = f^+ + f^- \geq f^+$  ja  $f^- \geq 0$ , joten Lauseen 5.3 nojalla  $\int_E |f| \, d\mu < \infty$ . Jos  $f$  on mitallinen ja  $\int_E |f| \, d\mu < \infty$ , niin  $\int_E (f^+ + f^-) \, d\mu < \infty$  ja siten  $\int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu < \infty$  ja  $\int_E f^+ \, d\mu < \infty$  ja  $\int_E f^- \, d\mu < \infty$ . Näin ollen  $f$  on integroituva. Lisäksi

$$\begin{aligned} \left| \int_E f \, d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right| \leq \left| \int_E f^+ \, d\mu \right| + \left| \int_E f^- \, d\mu \right| \\ &= \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E f^+ + f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Koska integroitavat funktiot muodostavat niin yleisesti käytetyn luokan, annetaan sille nimi: Sanomme, että  $f \in L^1(E, \mu)$  jos  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen funktio jolle  $\int_E |f| \, d\mu < \infty$ . Jos  $E$  on yhteydestä selvä, käytetään lyhyempää merkintää  $L^1(\mu)$ . Jos  $\mu$  on Lebesgue'in mitta, käytetään merkintää  $L^1(E)$  to  $L^1$ .

Integraalin perusominaisuudet ovat jälleen helposti todistettavissa tässä yleisessä tapauksessa.

**Lause 6.3.** Oletetaan, että  $f, g \in L^1(E, \mu)$ .

- (a)  $m(\{x \in E \mid f(x) = +\infty \text{ tai } f(x) = -\infty\}) = 0$ .  
 (b) Jos  $f \leq g$  m.k. joukossa  $E$ , niin  $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ .  
 (c) funktio  $f + g$  on määritelty m.k. joukossa  $E$ ,  $f + g \in L^1(E, \mu)$  on integroituva yli joukon  $E$  ja

$$\int_E f + g \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu.$$

- (d) Jos  $\alpha \in \mathbb{R}$ , niin  $\alpha f \in L^1(E, \mu)$  ja  $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$ .

TODISTUS. Kohdat (a)–(c) jätetään lukijalle.

Kohdan (d) voi todistaa vaikka seuraavasti: Jos  $\alpha \geq 0$ , niin  $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$  ja  $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ , joten väite seuraa Lauseesta 4.2 (e). Jos  $\alpha < 0$ , niin  $(\alpha f)^+ = (-\alpha) f^-$  ja  $(\alpha f)^- = (-\alpha) f^+$ , joten

$$\begin{aligned} \int_E \alpha f \, d\mu &= \int_E (\alpha f)^+ \, d\mu - \int_E (\alpha f)^- \, d\mu = \int_E (-\alpha) f^- \, d\mu - \int_E (-\alpha) f^+ \, d\mu \\ &= (-\alpha) \int_E f^- \, d\mu - (-\alpha) \int_E f^+ \, d\mu = \alpha \cdot \left( \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu \right) \\ &= \alpha \int_E f \, d\mu. \quad \square \end{aligned}$$

Edellisestä lauseesta seuraa erityisesti, että jos  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on mitallinen funktio jolle  $|f(x)| \leq g(x)$  m.k. joukossa  $E$  jollekin  $g \in L^1(E, \mu)$ , niin myös  $f \in L^1(E, \mu)$  ja

$$\int_E |f| \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu.$$

Kolmas keskeinen Lebesgue'in teorian raja-arvolause ei vaadi funktiolta ei-negatiivisuutta, vaan että itseisarvo on sopivasti ylhäältä rajoitettu. Tästä syystä sitä kutsutaan *dominoidun suppenemisen* lauseeksi.

**Lause 6.4** (Lebesguen DS-lause). *Olkoon  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mitallinen funktio ja  $(f_k)_{k=1}^\infty$  jono sellaisia mitallisia funktioita  $E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , että  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  m.k. joukossa  $E$ . Jos on olemassa sellainen integroitava funktio  $g : E \rightarrow [0, \infty]$ , että  $|f_k(x)| \leq g(x)$  m.k. joukossa  $E$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ , niin funktio  $f$  on integroitava yli joukon  $E$  ja*

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_E f d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

TODISTUS. Merkitään

$$E_0 = \left\{ x \in E \mid \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x) \text{ ja } |f_k(x)| \leq g(x) \forall k \in \mathbb{Z}_+ \right\}.$$

Selvästi  $m(E \setminus E_0) = 0$ . Lisäksi  $|f(x)| \leq g(x)$  aina, kun  $x \in E_0$ , sillä  $|f_k(x)| \leq g(x)$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$  ja  $x \in E_0$ . Edellisen lauseen nojalla kaikki funktiot  $f_k$  ja myös funktio  $f$  ovat integroituvia yli joukon  $E$ . Merkitään

$$A := \{x \in E_0 \mid |f_k(x)| < \infty \forall k \in \mathbb{Z}_+ \text{ ja } |f(x)| < \infty\}.$$

Lauseen 4.3 nojalla myös  $m(E \setminus A) = 0$ . Nyt funktiot  $g \pm f_k : A \rightarrow [0, \infty[$  ja  $g \pm f : A \rightarrow [0, \infty[$  ovat integroituvia joukon  $A$  yli ja  $g(x) \pm f_k(x) \rightarrow g(x) \pm f(x)$  joukossa  $A$ . Fatoun Lemman nojalla

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu + \int_E f d\mu &= \int_A g + f d\mu = \int_A \lim_{k \rightarrow \infty} g + f_k d\mu \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A g + f_k d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_A g d\mu + \int_A f_k d\mu \right) \\ &= \int_E g d\mu + \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu, \end{aligned}$$

joten

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} \int_E g d\mu - \int_E f d\mu &= \int_A g - f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_A g - f_k d\mu \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( \int_A g d\mu - \int_A f_k d\mu \right) = \int_E g d\mu + \liminf_{k \rightarrow \infty} \left( - \int_E f_k d\mu \right) \\ &= \int_E g d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu \end{aligned}$$

ja saadaan

$$\int_E f d\mu \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

Tällöin

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu \leq \int_E f d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

Koska aina  $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$ , on välttämättä

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu = \int_E f d\mu. \quad \square$$

Jos  $m(E) < \infty$  ja  $|f_k(x)| \leq C$  m.k. joukossa  $E$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ , ja  $f_k \rightarrow f$  m.k., niin  $g = C$  on integroituva majorantti ja siis DS-lause pätee ja

$$\int_E f d\mu \leq C m(E) < \infty.$$

Seuraavan lauseen todistaminen jätetään harjoitukseksi.

**Lause 6.5.** *Olkoon  $\{E_k\}_k \subset \mathbb{R}^n$  korkeintaan numeroituva perhe erillisiä mitallisia joukkoja ja  $f : \cup_k E_k \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mitallinen funktio.*

(a) *Jos  $f$  on integroituva joukon  $\cup_k E_k$  yli, niin  $f$  on integroituva jokaisen joukon  $E_k$  yli ja*

$$(8) \quad \int_{\cup_k E_k} f d\mu = \sum_k \int_{E_k} f d\mu.$$

(b) *Jos  $f$  on integroituva jokaisen joukon  $E_k$  yli ja jos*

$$\sum_k \int_{E_k} |f| d\mu < \infty,$$

*niin  $f$  on integroituva joukon  $\cup_k E_k$  yli ja kaava (8) on voimassa.*

## 7. Riemannin integraali

Mikä on Lebesguen ja Riemannin integraalien välinen yhteys?

Tässä luvussa käytämme symbolia  $\oint_a^b f(x) dx$  Riemannin integraalille. Tämä symboli yleensä tarkoittaa jotain muuta; Riemannin integraalille ei ole erityistä symbolia, koska, kuten seuraavaksi osoitamme, siinä, että Riemannin ja Lebesgue'in integraaleille käytetään samaa symbolia ei oikeasti ole sekaannuksen vaaraa.

Seuraava tulos pätee yleisemminkin, mutta todistetaan se tässä yksinkertaisuuden vuoksi tapauksessa  $n = 1$  ja  $E = [a, b]$ .

**Lemma 7.1.** *Olkoon  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$  Riemannin mielessä integroituva. Tällöin  $f$  on mitallinen ja*

$$\int_{[a,b]} f dx = \oint_a^b f(x) dx,$$

*ts. integraalit ovat samat.*

**TODISTUS.** Koska  $f$  on Riemannin mielessä integroituva, on olemassa sellaiset porrasfunktiot  $\{\varphi_n\}$  ja  $\{\psi_n\}$  (ala- ja yläsummat), että

$$\varphi_n(x) \leq f(x) \leq \psi_n(x) \text{ aina, kun } x \in [a, b] \text{ ja } n \in \mathbb{Z}_+, \text{ sekä} \\ 0 \leq \varphi_n \leq \varphi_{n+1} \leq f \leq \psi_{n+1} \leq \psi_n.$$

Integraalin määritelmän nojalla

$$\oint_a^b \psi_n dx - \oint_a^b \varphi_n dx \leq \frac{1}{n},$$

joten

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n dx.$$

Toisaalta jokainen tällainen porraskäyrä on myös yksinkertainen funktio ja

$$\int_a^b \varphi_n dx = \int_{[a,b]} \varphi_n dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b \psi_n dx = \int_{[a,b]} \psi_n dx.$$

Rajafunktiot  $\varphi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$  ja  $\psi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$  ovat myös mitallisia, joten Lebesguen MS-lauseen ja Fatouin Lemman nojalla

$$\int_{[a,b]} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \psi_n dx \geq \int_{[a,b]} (\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n) dx = \int_{[a,b]} \psi dx.$$

Toisaalta  $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ , joten  $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$ . Siis

$$\int_{[a,b]} \psi - \varphi dx = 0,$$

missä  $\psi - \varphi \geq 0$ . Lauseen 4.5 nojalla  $\psi(x) = \varphi(x)$  m.k. välillä  $[a, b]$ , joten  $f(x) = \varphi(x) = \psi(x)$  m.k. välillä  $[a, b]$ . Siis  $f$  on mitallinen. Lopuksi saadaan

$$\int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,b]} \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n dx = \int_a^b f(x) dx. \quad \square$$

**Lause 7.2.** Olkoon  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integroituva. Tällöin funktio  $f$  on integroituva yli joukon  $E$  ja

$$\int_E f dx = \int_E f(x) dx.$$

TODISTUS. Tarkastellaan tapausta  $n = 1$ . Jos funktio  $f$  on Riemann-integroituva, niin  $f^+$  ja  $f^-$  ovat Riemann-integroituvia. Lemman 7.1 nojalla

$$\int_E f^+ dx = \int_E f^+(x) dx \quad \text{ja} \quad \int_E f^- = \int_E f^-(x) dx.$$

Siis

$$\begin{aligned} \int_E f dx &= \int_E f^+ dx - \int_E f^- dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \\ &= \int_E (f^+(x) - f^-(x)) dx = \int_E f(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

**Huomautus.** Lauseen 6.2 nojalla funktio  $f$  voi olla mitallinen vaikka se ei ole integroituva ( $\int_E f^+ dx = +\infty$ , tai  $\int_E f^- dx = +\infty$ ). Tämä johtaa eroon epäoleellisissa integraaleissa.

**Esimerkki.** Olkoon  $f : [\pi, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Funktio  $f$  on jatkuva, joten se on mitallinen. Nyt

$$\begin{aligned} \int_{[\pi, \infty[} |f| dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x| dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty. \end{aligned}$$

Siis  $f$  ei ole integroituva. Toisaalta epäoleellinen Riemann-integraali on olemassa, sillä

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{\pi}^c \frac{\sin x}{x} dx =: \lim_{c \rightarrow \infty} J(c),$$

missä

$$J(n\pi) = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Leibnitzin testin nojalla yo. sarja suppenee.

**Essee tehtävä 2.** Osoitta, että  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on Riemannin mielessä integroituva jos ja vain jos  $f$  on jatkuva m.k. välillä  $[a, b]$ . Lähteenä voi käyttää esimerkiksi kirjaa [Apostol s. 169–172].

## 8. Integraalilaskennan päälause

Tähän mennessä olemme määritelleet Lebesgue:in integraalin, osoittaneet sen perusominaisuudet sekä yhteyden Riemann integraaliin. Lisäksi olemme nähneet, että Lebesgue:in integraalilla on hyviä suppenemisominaisuuksia, joita Riemannin integraalilta puuttuu. Seuraavaksi tarkastelemme mitä viimeksimainituista seuraa myös muita perusanalyysistä tuttuja lauseita yleisemmässä muodossa. Erityisesti tarkoituksena on tutkia, milloin integrointi ja derivointi ovat toistensa käänteisoperaatioita, eli milloin

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x)?$$

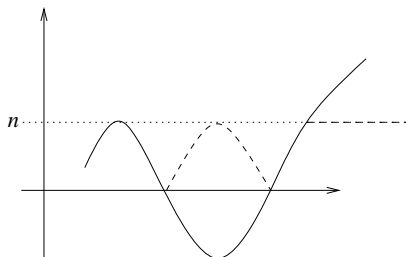
Integroituvalla funktiolla on se ominaisuus, että sen integraali yli pienen joukon on aina pieni:

**Lause 8.1.** *Olkoon  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  integroituva yli joukon  $E$ . Tällöin jokaista lukua  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että*

$$\int_A |f| d\mu < \varepsilon$$

*aina, kun  $A \subset E$  on mitallinen ja  $m(A) < \delta$  (ts. integraali on tasaisesti jatkuva).*

TODISTUS. Määritellään approksimaatio funktiolle  $|f|$  seuraavasti (ks. kuva 3):



KUVA 3. Approksimaatio  $\psi_k(x)$

$$\psi_k(x) = \begin{cases} |f(x)|, & \text{jos } |f(x)| \leq k, \\ k, & \text{jos } |f(x)| > k, \end{cases}$$

aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Tällöin jokainen  $\psi_k$  on mitallinen ja ei-negatiivinen sekä  $0 \leq \psi_k(x) \leq \psi_{k+1}(x) \leq |f(x)|$  aina, kun  $x \in E$  ja  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Edelleen  $\psi_k(x) \rightarrow |f(x)|$  aina, kun  $x \in E$ , joten voidaan soveltaa Lebesguen MS-lausetta:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E \psi_k d\mu = \int_E \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k d\mu = \int_E |f| d\mu.$$

Olkoon  $\varepsilon > 0$  mielivaltainen. Koska nyt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f| - \psi_k d\mu = 0,$$

niin on olemassa sellainen kiinteä  $s \in \mathbb{Z}_+$ , että  $\int_E |f| - \psi_s d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ . Valitaan  $\delta = \frac{\varepsilon}{2s}$ , jolloin jokaiselle mitalliselle joukolle  $A \subset E$ , jolle  $m(A) < \delta$ , on voimassa:

$$\int_A \psi_s d\mu \leq \int_A s d\mu = s m(A) < s\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis

$$\begin{aligned} \int_A |f| d\mu &= \int_A |f| - \psi_s d\mu + \int_A \psi_s d\mu \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

Loppukappaleessa tarkastellaan tapausta  $n = 1$ , eli reaaliakselin osajoukkoja  $E \subset \mathbb{R}$ . Seuraava esitys perustuu kirjaan Royden, "Real Analysis, 2-nd ed.". Todetaan ilman todistusta Vitalin peitelausetta:

**Lemma 8.2** (esim. Royden, "Real Analysis, 2-nd ed.", s. 95). *Olkoon  $E \subset \mathbb{R}$  joukko jonka ulkomitta on äärellinen. Olkoon  $\mathcal{J}$  sellainen joukon  $E$  peite, että jokaisella  $x \in E$  ja  $\varepsilon > 0$  on olemassa väli  $I \in \mathcal{J}$  joka sisältää pisteen  $x$  ja jonka ulkomitta on korkeintaan  $\varepsilon$ .*

*Nyt jokaiselle  $\varepsilon > 0$  on olemassa äärellinen erillisten välien perhe  $\{I_1, \dots, I_k\}$  jotka melkein peittävät  $E$ , eli*

$$m^*\left(E \setminus \bigcup_{l=1}^k I_l\right) < \varepsilon.$$

Reaaliakselin funktiolle  $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  määritellään suunnatut ylä- ja aladerivaatat seuraavasti

$$\begin{aligned} D^+ f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ D^- f(x) &= \limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}, \\ D_+ f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ ja} \\ D_- f(x) &= \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}. \end{aligned}$$

Jos  $D^+ f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D_- f(x)$  niin merkkäämme  $f'(x)$ :llä yhteistä arvoa. Jos  $D^+ f(x) = D^- f(x) = D_+ f(x) = D_- f(x) \neq \pm\infty$  niin sanomme, että  $f$  on differentioituva pisteessä  $x$ .

**Lause 8.3.** *Olkoon  $f$  kasvava funktio välillä  $[a, b]$ . Silloin  $f$  on differentioituva melkein kaikialla, ja*

$$\int_a^b f'(x) dx \leq f(b) - f(a).$$

TODISTUS. Tutkitaan joukkoa jossa  $D^+f > D_-f$ , ja osoitetaan se nollamittaiseksi. Muut epäyhtälöt  $D^\pm > D_\pm$  hoidetaan samalla tavalla. Tästä päätellään, että  $f'$  on olemassa melkein kaikialla.

Kvantitatiivien kontrollin saamiseksi jaamme joukon  $D^+f > D_-f$  seuraavasti:

$$\{D^+f > D_-f\} = \bigcup_{u,v \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{D^+f > u > v > D_-f\}}_{=: E_{u,v}}.$$

Nyt  $m(\{D^+f > D_-f\}) \leq \sum_{u,v} m(E_{u,v})$ , joten riittää osoittaa, että  $m(E_{u,v}) = 0$  kaikille  $u, v \in \mathbb{Q}$ .

Kiinnitetään siis  $u, v \in \mathbb{Q}$  ja  $\epsilon > 0$ , ja asetetaan  $s := m(E_{u,v})$ . Peitettään joukko  $E_{u,v}$  avoimella joukolla  $A$  jolle  $m(A) < s + \epsilon$ . Koska  $D_-f(x) < v$  joukossa  $E_{u,v}$  löytyy mielivaltaisen pieni  $h > 0$  jolle  $f(x) - f(x-h) < vh$ . Tällaiset välit  $[x-h, x]$  jotka sisältyvät joukkoon  $A$  peittävät joukon  $E_{u,v}$ . Vitalin peitelauseen mukaan voidaan valita sellainen äärellinen, erillinen osapeite  $\{I_1, \dots, I_k\}$  että  $m(E_{u,v} \setminus \bigcup I_m) < \epsilon$ , jolloin  $m(\bigcup I_m) > s - \epsilon$ . Merkataan  $B = \bigcup I_m$ . Välien  $I_m = [x_m - h_m, x_m]$  konstruktion nojalla saadaan

$$\sum_{m=1}^k f(x_m) - f(x_m - h_m) \leq \sum_{m=1}^k v h_m \leq v m(\bigcup I_m) \leq v m(A) \leq v(s + \epsilon).$$

Intuitio tässä on, että jos funktion derivaatta on  $v$ , niin funktio muuttuu korkeintaan  $h$ -pituisella välillä korkeintaan  $vh$ .

Käytetään seuraavaksi ehtoa  $D^+f(x) > u$  vastaavalla tavalla. Jokaiselle  $y \in E_{u,v} \cap B$  löytyy mielivaltaisen pieni  $r > 0$  jolle  $f(x+r) - f(x) > ur$ . Tällaiset välit  $[x, x+r]$  jotka sisältyvät joukkoon  $B$  peittävät joukon  $E_{u,v} \cap B$ . Vitalin peitelauseen mukaan voidaan valita sellainen äärellinen, erillinen osapeite  $\{J_1, \dots, J_l\}$  että  $m((E_{u,v} \cap B) \setminus \bigcup J_m) < \epsilon$ , jolloin  $m(\bigcup J_m) > s - 2\epsilon$ . Kuten aiemmin saadaan

$$\sum_{a=1}^l f(y_a + r_a) - f(y_a) \geq \sum_{a=1}^l u r_a \geq v(s - 2\epsilon).$$

Kiinnitetään luku  $m \in \{1, \dots, k\}$  ja tutkitaan niitä välejä  $J_a$  jotka sisältyvät joukkoon  $I_m$ . Koska  $f$  on kasvava seuraa, että

$$\sum_{a: J_a \subset I_m} f(y_a + r_a) - f(y_a) \leq f(x_m) - f(x_m - h_m).$$

Jokainen  $J_a$  kuuluu täsmälleen yhteen joukkoon  $I_m$ . Kun siis lasketaan yhteen edelliset yhtälöt arvoilla  $m = 1, \dots, k$  saadaan oikealle puolelle jokainen  $J_a$  täsmälleen kerran. näin ollen saadaan

$$\sum_{a=1}^l f(y_a + r_a) - f(y_a) \leq \sum_{m=1}^k f(x_m) - f(x_m - h_m).$$

Kun tämä yhdistetään yhtälöihin (8) ja (8) saadaan  $v(s - 2\epsilon) \leq u(s + \epsilon)$ . Koska  $u, v$  ja  $s$  eivät riipu  $\epsilon$ :ista, saadaan edelleen  $vs \leq us$ . Koska  $v > u$  ja  $s \geq 0$  päätellään, että  $s = 0$ , eli  $E_{u,v}$  on nollamittainen.

Näin myös  $E$  on nollamittainen, ja päättelemme, että  $f'$  on olemassa melkein kaikkialla ja

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

melkein kaikkialla. Tutkitaan e.m. raja-arvoa seuraavaksi kun  $h = 1/m$  ja määritellään  $g_m(x) = m(f(x + 1/m) - f(x))$ , missä  $f(x) = f(b)$  jos  $x \geq b$ . Selvästi  $g_m$  on mitallinen. Lisäksi  $g_m \rightarrow f'$  m.k., joten  $f'$  on mitallinen.

Koska  $f$  on kasvava funktio, on  $g_m \geq 0$ . Soveltamalla Fatoun lemmaa saadaan

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x) dx &\leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \int_a^b g_m(x) dx \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} m \int_a^b f(x + 1/m) - f(x) dx \\ &= \liminf_{m \rightarrow \infty} m \int_b^{b+1/m} f(x + 1/m) dx - \int_a^{a+1/m} f(x) dx \\ &\leq f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Näin ollen  $f' \in L^1([a, b])$  joten  $f' < \infty$  m.k., ja funktio on siis differentioituva m.k.  $\square$

Edellinen lause pätee vain kasvaville funktiolle, mutta derivaatan lineaarisuuden nojalla päätellään, että funktio  $f$  on derivoituva melkein kaikkialla, jos  $f = f_1 - f_2$  missä  $f_1$  ja  $f_2$  ovat kasvavia funktiota. Annetaan tälle funktioluokalle nimi:

**Määritelmä 8.4.** Funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  on *rajoitetusti heilahteleva* jos  $f = f_1 - f_2$  missä  $f_1$  ja  $f_2$  ovat kasvavia funktiota.

**Huomautus.** Yleensä rajoitetusti heilahteleville funktioille käytetään toista määritelmää, joka on kuitenkin ekvivalentti tämän määritelmän kanssa.

Palautetaan mieleen integraalifunktion käsite:

**Määritelmä 8.5.** Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  välin  $[a, b]$  yli integroitava funktio. Funktiota  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , jolle

$$F(x) = \int_a^x f dx \quad \text{kun } x \in [a, b],$$

sanotaan funktion  $f$  *integraalifunktioksi*.

Huomaa, että  $F(x) \in (-\infty, +\infty)$ , koska  $\int_a^x f dx = \int_a^x f^+ dx - \int_a^x f^- dx$ , missä

$$\int_a^x f^+ dx \leq \int_a^b f^+ dx < \infty \quad \text{ja} \quad \int_a^x f^- dx \leq \int_a^b f^- dx < \infty.$$

Määritelmän mukaan

$$F(x) = \int_a^x f^+ dx - \int_a^x f^- dx.$$

Koska  $f^+$  ja  $f^-$  ovat ei-negatiivisia, ovat funktiot

$$x \mapsto \int_a^x f^+ dx \quad \text{ja} \quad x \mapsto \int_a^x f^- dx$$

kasvavia, joten integraalifunktio  $F$  on aina rajoitetusti heilahteleva. Näin Lauseesta 8.3 seuraa, että  $F$  on differentioituva melkein kaikkialla. Tavoitteenamme on lisäksi osoittaa, että  $F' = f$  m.k. Todistetaan tämä muutaman aputuloken avulla.

**Lemma 8.6.** *Olkoon  $f \in L^1([a, b])$  ja  $F(x) = 0$  m.k.  $x \in [a, b]$ . Tällöin myös  $f = 0$  m.k.  $x \in [a, b]$ .*

TODISTUS. Olkoon  $E$  se joukko jossa  $f > 0$ , ja tehdään vasta oletus, että  $m(E) > 0$ . Mitan sisäsäännöllisyyden nojalla löytyy suljettu joukko  $F \subset E$  joka on myös positiivismittainen. Merkitaan  $A = (a, b) \setminus F$ . Huomaa, että  $A$  on avoin.

Koska

$$0 = \int_a^b f \, dx = \int_A f \, dx + \int_F f \, dx,$$

päätellään, että  $\int_A f \, dx = -\int_F f \, dx < 0$ . Koska  $A$  on avoin joukko, voidaan se esittää numeroituvana yhdisteenä avoimia välejä:  $A = \cup_i (a_i, b_i)$ . Integraalin additiivisuudesta saadaan

$$\int_A f \, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f \, dx.$$

Ainakin yksi summan termi on nolasta eroava, esim.  $\int_{a_m}^{b_m} f \, dx \neq 0$ . Näin ollen

$$\int_a^{a_i} f \, dx \neq \int_a^{b_i} f \, dx$$

joten ainakin toinen näistä eroaa nolasta, vastoin lauseen oletusta.

Sama ristiriita syntyy jos löytyy positiivismittainen joukko jossa  $f$  on pienempi kuin nolla. Näin  $f = 0$  m.k.  $\square$

**Lemma 8.7.** *Olkoon  $f$  rajoitettu mitallinen funktio välillä  $[a, b]$ . Tällöin  $F' = f$  melkein kaikkialla.*

TODISTUS. Olkoon  $K > 0$  sellainen, että  $|f(x)| \leq K$  kaikilla  $x \in [a, b]$ . Määritellään

$$f_m(x) = n(F(x + \frac{1}{m}) - F(x)) = n \int_x^{x+\frac{1}{m}} f(y) \, dy.$$

Toisesta lausekkeesta päätellään, että  $|f_m| \leq K$ .

Koska  $F$  on rajoitetusti heilahteleva, on  $F$  differentioituva m.k., ja  $f_m \rightarrow F'$  m.k. Näin ollen dominoidun suppenemisen lauseesta seuraa, että

$$\begin{aligned} \int_a^z F' \, dx &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^z f_m \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \int_a^z F(x + \frac{1}{m}) - F(x) \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} m \left( \int_z^{z+\frac{1}{m}} F(x) \, dx - \int_a^{a+\frac{1}{m}} F(x) \, dx \right) \\ &= F(z) - F(a) = \int_a^z f \, dx. \end{aligned}$$

Näin siis  $\int_a^z F' - f \, dx = 0$  kaikilla  $z \in (a, b)$ , joten  $F' = f$  m.k. edellisen lemmän nojalla.  $\square$

**Lause 8.8.** *Olkoon  $f \in L^1([a, b])$ . Tällöin  $F' = f$  melkein kaikkialla.*

TODISTUS. Riittää tarkastella erikseen funktioita  $f^+$  ja  $f^-$ . Näin ollen oletamme, että  $f \leq 0$ .

Olkoon  $f_m(x) = \min\{f(x), m\}$ . Koska  $f - f_m \geq 0$ , on funktio

$$G_m(z) = \int_a^z f - f_m dx$$

kasvava muuttujan  $z$  suhteen. Näin ollen  $G_m$  on differentioituva m.k., ja  $G'_m \geq 0$ .

Koska  $f_m$  on rajoitettu, päätellään edellisen lauseen nojalla, että  $F'_m = f_m$  m.k., missä  $F_m$  on  $f_m$ :n integraalifunktio. Integraalin ja derivaatan additiivisuudesta saadaan nyt

$$F'(z) = (G_m(z) + F_m(z))' = G'_m(z) + F'_m(z) \geq f_m(z)$$

m.k. Koska tämä pätee kaikille  $m \geq 1$ , saadaan tästä  $F'(z) \geq f(z)$  m.k. Toisaalta Lauseen 8.3 tiedämme, että

$$\int_a^b F' - f dx \leq 0.$$

Koska integroitava funktio on ei-negatiivinen m.k., seuraa tästä, että  $F' = f$  m.k. □

Edellä näimme, että integroituvan funktion integraalifunktion derivaatta on funktio itse. Vastaavasti voisi ajatella, että derivaattaa integroimalla saisi takaisin alkuperäisen funktion. Näin ei kuitenkaan yleisesti käy. Esimerkiksi Cantorin rapufunktio on monotoonisesti kasvava, ja sillä on siis derivaatta melkein kaikkialla. Kuitenkin sen derivaatta on nolla m.k., joten derivaatan integraalikin on nolla, eikä alkuperäinen funktio.

Jotta derivaattaa integroimalla saisi takaisin alkuperäisen funktion vaaditaan siis jokin lisäoletus, josta yleisin on seuraavan määritelmän antama.

**Määritelmä 8.9.** Funktiota  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sanotaan *absoluuttisesti jatkuvaksi* välillä  $[a, b]$ , jos jokaista  $\varepsilon > 0$  kohti on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että jokaiselle äärelliselle kokoelmalle erillisiä osavälejä  $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ ,  $k = 1, 2, \dots, i$ , ehdosta

$$\sum_{k=1}^i (b_k - a_k) < \delta$$

seuraa, että

$$\sum_{k=1}^i |h(b_k) - h(a_k)| < \varepsilon.$$

Lauseelle 8.1 saadaan välittömästi

**Esimerkki.** Jos  $f : [a, b] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  on integroitava yli välin  $[a, b]$ , niin sen integraalifunktio  $g$  on absoluuttisesti jatkuva välillä  $[a, b]$ :

Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Lauseen 8.1 nojalla on olemassa sellainen  $\delta > 0$ , että

$$\int_A |f| dx < \varepsilon,$$

kun  $m(A) < \delta$ ,  $A \subset [a, b]$ . Olkoon  $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$  sellainen kokoelma erillisiä välejä, että  $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) = m(\cup_{k=1}^n (a_k, b_k)) < \delta$ . Silloin

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{b_k} f \, dx - \int_a^{a_k} f \, dx \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_a^{a_k} f \, dx + \int_{a_k}^{b_k} f \, dx + \int_a^{a_k} f \, dx \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \left| \int_{a_k}^{b_k} f \, dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^{b_k} |f| \, dx \\ &= \int_{\cup_{k=1}^n [a_k, b_k]} |f| \, dx < \varepsilon. \end{aligned}$$

Absoluuttisesti jatkuva funktio on rajoitetusti heilahteleva, joten se on differentioituva.

Toistaiseksi ilman todistusta esitetään seuraava lause:

**Lause 8.10.** *Jos  $F$  on absoluuttisesti jatkuva, niin  $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(y) \, dy$  kaikilla  $x \in [a, b]$ .*

## Hilbertin avaruudet

### 1. Funktioavaruuudet

Tähän asti olemme tutkineet yhtä funktiota, ja erityisesti sen integraalia. Olemme myös lyhyesti katsoneet integroinnin ja differentioinnin välistä yhteyttä, ja todistaneet integraalilaskennan peruslauseen huomattavasti yleisemmässä tapauksessa kuin aiemmilla kursseilla.

Matemaattiselle analyysille oli ominaista juuri tällainen yhteen funktioon keskittyvä lähestymistapa aina 1900 luvun alkupuolelle asti. Näistä ajoista lähtien ollaan analyysin ongelmia tutkittu myös funktioavaruuksien kautta. Funktioavaruus on joukko funktioita, joille määritellään jonkinlainen geometrinen struktura. Esimerkiksi funktion approksimoinnissa on luonnollista ajatella, että kahden funktion välillä on jokin etäisyys: mitä pienempi etäisyys oikeaan funktioon, sitä parempi approksimaatio.

Funktioavaruus lähestymistavalla on lisäksi se etu, että saamme käyttöömmme lineaarialgebran ja topologian työkalut. Lähdetään siis liikkeelle palauttamalla mieleen lineaari algebran peruskäsitteen määritelmä:

**Määritelmä 1.1.** Olkoon  $V$  joukko,  $K$  kunta, ja  $+$ :  $V \times V \rightarrow V$  ja  $\cdot$ :  $K \times V \rightarrow V$  kuvauksia. Sanomme, että  $(V, +, \cdot)$  on *vektori avaruus yli kunnan  $K$*  jos seuraavat ehdot täyttyvät:

- $(V, +)$  on abelin ryhmä;
- $1 \cdot v = v$  kaikilla  $v \in V$ ;
- $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$  kaikilla  $v \in V$  ja  $\alpha, \beta \in K$ ;
- $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$  ja  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$  kaikilla  $u, v \in V$  ja  $\alpha, \beta \in K$ .

**Esimerkki.** Tutut esimerkit vektori avaruuksista ovat  $\mathbb{Q}$  yli  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  yli  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  yli  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{R}$  yli  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}^n$  yli  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  yli  $\mathbb{R}$ , jne.

Olemmekin jo kohdanneet esimerkin funktioavaruudesta, eli funktiojoukosta, joka on vektoriavaruus. Jos nimittäin määrittelemme funktioiden yhteen- ja kertolaskun pisteittäin, ts.  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  ja  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ , niin  $L^1(E, \mu)$  on vektoriavaruus yli kunnan  $\mathbb{R}$ .

Tämä avaruus on itse asiassa vain yksi esimerkki laajemmasta perheestä, joka määritellään seuraavasti:

**Määritelmä 1.2.** Olkoon  $\mu$  mitta ja  $E$   $\mu$ -mitallinen joukko. Avaruus  $L^p(E, \mu)$  koostuu niistä funktioista  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  joille

$$\int_E |f(x)|^p d\mu < \infty.$$

Huomaa, että kun operaatioista  $+$  ja  $\cdot$  ei sanota mitään, kuten edellisessä määritelmässä, tulee ymmärtää, että kyse on luonnollisista operaatioista, eli pisteittäisestä yhteen- ja kertolaskusta.

Kaikki muut vektori avaruuden ominaisuudet ovat selvät, paitsi se, että  $f, g \in L^p$  implikoi, että  $f + g \in L^p$ . Oletetaan siis, että  $f, g \in L^p$ . Silloin

$$\int_E |f(x) + g(x)|^p d\mu \leq \int_E (|f(x)| + |g(x)|)^p d\mu \leq 2^{p-1} \int_E |f(x)|^p + |g(x)|^p d\mu < \infty.$$

Toisessa epäyhtälössä käytimme reaaliluku epäyhtälöä

$$\frac{x + y}{2} \leq \left( \frac{x^p + y^p}{2} \right)^{1/p}.$$

Tutkitaan miten eksponentti  $p$  vaikuttaa avaruuden  $L^p$  kokoon:

**Lause 1.3.** *Olkoon  $E$   $\mu$ -mitallinen joukko jolle  $\mu(E) < \infty$ . Tällöin  $L^p(E, \mu) \subset L^q(E, \mu)$  jos ja vain jos  $p \geq q$ .*

**TODISTUS.** Olkoon  $p \geq q$ . Meidän pitää siis todistaa, että funktio  $f \in L^p(E, \mu)$  kuuluu myös avaruuteen  $L^q(E, \mu)$ . Tämä seuraa arviosta

$$\int_E |f(x)|^q d\mu \leq \int_E \max\{1, |f(x)|^p\} d\mu \leq \mu(E) + \int_E |f(x)|^p d\mu < \infty. \quad \square$$

Edellisestä lauseesta seuraa erityisesti, että jokainen  $L^p$  funktio on integroitava jos joukon  $E$  mitta on äärellinen. Lukija voi harjoituksena osoittaa, että edellisen lauseen inklusio on aito jos  $p > q$ , ja, että lause ei päde ilman oletusta  $\mu(E) < \infty$ .

Meitä kiinnostaa erityisesti avaruus  $L^2$ . Aluksi voi tuntua siltä, että tämä avaruus on hankalampi kuin avaruus  $L^1$ . Itse asiassa päinvastainen on totta. Intuition siitä, miksi näin on saadaan katsomalla Eukliidista avaruutta: tässähän käytämme yleensä etäisyyttä

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2},$$

emmeikä (ns. Manhattan eli taksi)etäisyyttä

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Jos summa jaetaan luvulla  $n$  ja annetaan  $n \rightarrow \infty$ , niin summa lähestyy integraalia, ja saamme vastaavat  $L^2$  ja  $L^1$ -etäisyydet:

$$\|f - g\|_2 = \left( \int_E |f(x) - g(x)|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

ja

$$\|f - g\|_1 = \int_E |f(x) - g(x)| d\mu,$$

kun  $f, g \in L^2$  tai  $f, g \in L^1$ . Huomaa, että jos  $E = \{1, \dots, n\}$  ja  $\mu$  on lukumäärämitta, niin  $L^2(E, \mu)$  on sama avaruus kuin  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ .

Seuraava määritelmä kiteyttää etäisyyden ydinominaisuudet abstraktissa muodossa.

**Määritelmä 1.4.** Olkoon  $V$  vektori avaruus, jonka kertojakuntana  $\mathbb{K}$  on joko  $\mathbb{R}$  tai  $\mathbb{C}$ . Vektori avaruudessa  $V$  määriteltyä reaalifunktiota  $x \mapsto \|x\|$  sanotaan *normiksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- (N1)  $\|x\| \geq 0$  aina, kun  $x \in V$ ;
- (N2)  $\|x\| = 0$  jos ja vain jos  $x = \bar{0}$ ;
- (N3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  aina, kun  $\lambda \in \mathbb{K}, x \in V$ ; ja

(N4)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  aina, kun  $x, y \in V$  [kolmioepäyhtälö].

Paria  $(V, \|\cdot\|)$  sanotaan *normiavaruudeksi*.

**Huomautus.** Normiavaruutta yleisempi rakenne on metrinen avaruus. Normiavaruudesta saadaan metrinen avaruus määrittelemällä metriikka  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Metrinen avaruuden teoriaa on esitetty Liitteessä A.

Esimerkkejä normiavaruuksista ovat  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$  ja  $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_1)$ . Funktioavaruus  $(L^1, \|\cdot\|_1)$  toteuttaa kaikki normin ehdot, paitsi (N2):  $\|f\|_1 = 0$  jos ja vain jos  $f = 0$  m.k., kuten olemme aiemmin todistaneet. Avaruudessa  $L^1$  voidaan kuitenkin määritellä ekvivalenssi relaatio  $f \sim g$  jos  $f = g$  m.k. Tämä tarkoittaa, että samaistamme funktiot jotka yhtyvät melkein kaikkialla. Nyt pari  $(L^1 / \sim, \|\cdot\|_1)$  on normiavaruus. Tavallisesti sanomme, että  $L^1$  on normiavaruus, niin, että ekvivalenssirelaatio jää implisiittiseksi.

Myös  $L^2$  on esimerkki normiavaruudesta (samalla ekvivalenssirelaatio tulkinalla). Muut ehdot kuin kolmioepäyhtälö (N4) on helppo tarkistaa. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi esittelemme seuraavan tärkeän työkalun:

**Lemma 1.5** (Cauchy–Schwartzin epäyhtälö). *Olko  $f, g \in L^2(E, \mu)$ . Tällöin*

$$\int_E |f(x)g(x)| d\mu \leq \left( \int_E |f(x)|^2 d\mu \right)^{1/2} \left( \int_E |g(x)|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

**TODISTUS.** Tutkitaan funktiota  $(|f| - r|g|)^2$ , missä  $r \in \mathbb{R}$  ja  $f, g \in L^2$ . Tämä funktio on ei-negatiivinen, joten

$$0 \leq \int_E (|f| - r|g|)^2 d\mu = \int_E f^2 d\mu + r^2 \int_E g^2 d\mu + 2r \int_E |fg| d\mu =: A + Cr^2 + 2Br.$$

Kuten viimeisestä esityksestä nähdään, on meillä  $r$ :n suhteen toisen asteen polynomi, joka on ei-negatiivinen, tämä tapahtuu täsmälleen silloin, kun diskriminantti  $B^2 - AC$  on ei-positiivinen. Tästä saadaan Cauchy–Schwartzin epäyhtälö.  $\square$

Tästä seuraa, että  $L^2$  on normiavaruus: olkoot nimittäin  $f, g \in L^2$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \|f + g\|_2^2 &= \int (f + g)^2 d\mu = \int f^2 d\mu + 2 \int fg d\mu + \int g^2 d\mu \\ &\leq \int f^2 d\mu + 2 \left( \int f^2 d\mu \int g^2 d\mu \right)^{1/2} + \int g^2 d\mu \\ &= \left[ \left( \int f^2 d\mu \right)^{1/2} + \left( \int g^2 d\mu \right)^{1/2} \right]^2 \\ &= [\|f\|_2 + \|g\|_2]^2 \end{aligned}$$

kolmioepäyhtälö seuraa ottamalla tästä puolittain nelöjuuren. Myös avaruudet  $L^p(E, \mu)$  ovat normiavaruuksia (modulo ekvivalenssi). Kolmioepäyhtälön todistaminen vaatii nyt lisätyötä, johon ei tässä ryhdytä. Kiinnostuneelle kuitenkin:

**Essee tehtävä 3.** Tässä tehtävässä on tarkoituksena osoittaa, että  $L^p$  on normiavaruus kun  $p \in [1, \infty)$ . Tämä edellyttää kolmioepäyhtälön todistamista, joka hoituu Youngin, Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöiden avulla.

Tämän avulla saamme myös uuden esimerkin normiavaruudesta, joka vastaa numeroituva-ulotteista Eukliidista avaruutta:

**Esimerkki.** Olkoon  $E = \mathbb{N}$  ja  $\mu$  lukumäärämitta. Tällöin funktio  $f \in L^p(E, \mu)$  voidaan luonnollisella tavalla samaistaa jonoon  $(x_i)_{i=1}^\infty$ , missä  $x_i = f(i)$ . Tätä avaruutta merkitään tavallisesti  $l^p$ . Se siis koostuu niistä jonoista joille  $\|(x_i)\|_p < \infty$ , missä normi määritellään

$$\|(x_i)\|_p = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

Nyt siis normi  $\|x-y\|$  mittaa kahden normiavaruuden alkion välistä etäisyyttä. Sanomme siis, että  $x_i \rightarrow x$  jos  $\|x_i - x\| \rightarrow 0$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $f \in L^2(E)$ . Jos  $f_i \rightarrow f$  avaruudessa  $L^2$ , niin  $f_i(x) \rightarrow f(x)$  m.k.  $x \in E$ . Jos  $f_i(x) \rightarrow f(x)$  m.k.  $x \in E$  ja lisäksi tiedämme, että  $|f_i| \leq g$  m.k., missä  $g \in L^2$ , niin päätelemme dominoidun suppenemisen lauseen avulla, että  $\|f_i - f\|_2 \rightarrow 0$ , jolloin siis  $f_i \rightarrow f$  avaruudessa  $L^2$ . [Esimerkin väittämien tarkempi perustelu jätetään harjoitustehtäväksi.]

Samalla tavalla kuin Euklidisessa avaruudessa määrittelemme siis Cauchy jonon ja täydellisyyden:  $(x_i)$  on *Cauchy jono* jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa  $N$  siten että  $\|x_i - x_j\| < \epsilon$  kun  $i, j > N$ . Kuten Euklidisessa tapauksessa näemme, että suppeneva jono on aina Cauchy jono. Jos sama pätee myös toiseen suuntaan, sanomme, että avaruus on täydellinen:

**Määritelmä 1.6.** Normiavaruus  $V$  on *täydellinen* jos jokainen Cauchy jono supenee kohti jotain  $V$  alkia. Täydellistä normiavaruutta sanotaan *Banach avaruudeksi*.

**Esimerkki.** Analyysi I kurssilla on osoitettu, että  $\mathbb{R}$  on täydellinen, mutta  $\mathbb{Q}$  ei ole täydellinen. Tästä nähdään helposti, että  $\mathbb{R}^n$  on myös täydellinen.

Osoitamme alla, että myös  $L^p$  avaruudet ovat täydellisiä. Tämä on itse asiassa se keskeinen kohta, jossa tarvitsemme kehittämäämme Lebesgue'in integraaliteoriaa. Jos esimerkiksi yritämme konstruoida avaruutta mukavimmilla funktioilla, niin siitä ei tule mitään, kuten seuraava esimerkki osoittaa:

**Esimerkki.** Jos  $E \subset \mathbb{R}^n$  niin määrittelemme joukon

$$C(E) := \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

Kuten aiemmin, nähdään, että  $(C(E), \|\cdot\|_p)$  on normiavaruus. Se ei kuitenkaan ole täydellinen.

Olkoon esimerkiksi  $E = [-1, 1]$  ja  $p = 1$ . Nyt  $f_k(x) = |x|^{1/k-1}x$  ( $f_k(0) = 0$ ) on jatkuva funktio jokaisella  $k$ . Suoralla laskulla saamme  $\|f_k - f_i\|_1 = 2|k - i|/[(k+1)(i+1)]$ , joten  $(f_k)$  on Cauchy jono. Kuitenkin jono raja-arvo on funktio  $f = \chi_{(0,1]} - \chi_{[-1,0)}$ , joka ei kuulu avaruuteen  $C([-1, 1])$ . Näin ollen ei ole olemassa sellaista funktiota  $g \in C([-1, 1])$ , että  $\|f_i - g\|_1 \rightarrow 0$ , joten avaruus ei ole täydellinen.

Osoitetaan nyt  $L^p$  avaruuksien täydellisyys.

**Lause 1.7.** *Olkoon  $\mu$  mitta mitallisella joukolla  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Nyt avaruus  $L^p(E, \mu)$  on täydellinen.*

**TODISTUS.** Olkoon  $(f_i)$ ,  $f_i \in L^p$ , Cauchy jono. Valitaan osajono  $(f_{i_k})_k$ ,  $i_1 < i_2 < \dots$ , siten että

$$\|f_{i_{k+1}} - f_{i_k}\|_p < 2^{-k}$$

jokaisella  $k$ . Määritellään

$$g_m = \sum_{k=1}^m |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}| \quad \text{ja} \quad g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{i_{k+1}} - f_{i_k}|.$$

Kolmioepäyhtälön avulla saamme  $\|g_m\|_p < 1$  jokaisella  $k$ , ja tästä saadaan Fatoun lemman avulla, että myös  $\|g\|_p \leq 1$ . Tästä seuraa, että  $g < \infty$  m.k. Mutta jos  $g(x) < \infty$ , niin sarja

$$f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x)$$

on itseisesti suppeneva. Merkataan  $f(x)$ :llä sarjan raja-arvoa, kun se on olemassa, ja asetetaan  $f(x) = 0$  muuten. Koska

$$f_{i_1}(x) + \sum_{k=1}^m f_{i_{k+1}}(x) - f_{i_k}(x) = f_{i_{m+1}},$$

niin näemme, että  $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{i_{m+1}}$  m.k.

Osoitetaan lopuksi, että  $f_i \rightarrow f$ . Olkoon  $\epsilon > 0$  ja valitaan Cauchy ominaisuuden nojalla sellainen  $N$ , että  $\|f_i - f_j\|_p < \epsilon$  kun  $i, j > N$ . Kun  $m > N$  saadaan Fatoun lemma käyttämällä

$$\int_E |f - f_m|^p d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_{i_k} - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p.$$

Ottamalla  $p$ :s juuri saadaan siis  $\|f - f_m\|_p \leq \epsilon$ . Tästä seuraa kolmioepäyhtälön nojalla, että  $\|f\|_p < \infty$ , joten  $f \in L^p(E, \mu)$  ( $f$  on mitallinen aiemmin todistettujen tulosten nojalla). Koska  $\epsilon$  oli mielivaltainen, saadaan siis  $f_m \rightarrow f$  avaruudessa  $L^p$ , joten Cauchy jono suppenee, kuten oli todistettava.  $\square$

## 2. Hilbert avaruuden sovellus

Tarkastellaan seuraava differentiaaliyhtälöä. Ongelmana on löytää funktion  $u: [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$  joka toteuttaa lämpöyhtälön

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

kaikilla  $(x, y) \in (0, a) \times (0, b)$  ja reunaehdot

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{ja} \quad u(x, b) = \sin^2(\pi x/a)$$

kaikilla  $x \in [0, a]$  sekä

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$$

kaikilla  $y \in [0, b]$ . Ratkaisu kuvaa esimerkiksi lämpötilajakaumaa tilassa  $[0, a] \times [0, b]$  kun pystysivut ovat lämpöeristettyjä, lämpötila alasisvulla  $[0, a] \times \{0\}$  on 0 ja yläsisvulla  $[0, a] \times \{b\}$  on  $\sin^2(\pi x/a)$ .

Ratkaisu voidaan konstruoida muuttujien separoinnilla seuraavasti. Yritämme saada mahdollisimman moni yllä mainituista ehdoista täyttymään ratkaisuyritteellä  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . Tässä tapauksessa lämpöyhtälö tulee muotoon

$$X''Y + XY'' = 0$$

ja reunaehdot ovat  $X'(0) = X'(a) = 0$ ,  $Y(0) = 0$  ja  $X(x)Y(b) = \sin^2(\pi x/a)$ .

Jakamalla differentiaaliyhtälö tulolla  $XY$  (joka ei ole nolla alueen sisällä) saadaan  $X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y)$ . Koska vasen puoli riippuu pelkästään muuttujasta  $x$  ja oikea puoli pelkästään muuttujasta  $y$ , päättelemme, että kummatkin ovat vakioita. Osoittautuu, että tämä vakio on negatiivinen, joten merkitsemme sitä  $-\lambda^2$ :lla.

Yhtälön  $X'' = -\lambda^2 X$  yleinen ratkaisu on

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

josta saadaan reunaehdot huomioonottaen, että  $\lambda$  on muotoa  $\lambda_n = \frac{n\pi}{a}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ja ratkaisut ovat muotoa  $X_0(x) = A$  ja  $X_n(x) = c_n \cos(\lambda_n x)$ . Yhtälön  $Y'' = \lambda^2 Y$  yleinen ratkaisu on

$$Y(y) = Ce^{\lambda y} + De^{-\lambda y}.$$

Jos  $\lambda = 0$  saadaan  $Y(y) = Dy + C$ . Reunaehdosta  $Y(0) = 0$  seuraa, että edellisessä tapauksessa  $D = -C$ , jälkimmäisessä tapauksessa  $C = 0$ . Saamme siis

$$Y_n(y) = C(e^{\lambda_n y} - e^{-\lambda_n y}) = 2C \cosh(\lambda_n y)$$

ja  $Y_0(y) = Dy$ .

Tähän mennessä olemme todistaneet, että funktiot  $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$  toteuttavat lämpöyhtälön ja reunaehdot  $u(x, 0) = 0$  kaikilla  $x \in [0, a]$  sekä

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$$

kaikilla  $y \in [0, b]$  jokaisella luonnollisella luvulla  $n$ . Viimeinen, vaikein, reunaehto,  $u(x, b) = \sin^2(\pi x/a)$  kaikilla  $x \in [0, a]$ , on vielä täyttämättä. Se ei täytykään yksittäisellä funktiolla. Huomaamme kuitenkin, että myös summat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x, y)$$

täyttävät lämpöyhtälön ja kolme helppoa reunaehto, kunhan konvergensistä huolehditaan.

Yläreunaehto  $u(x, b) = \sin^2(\pi x/a)$  voidaan sarjan avulla kirjoittaa muotoon

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n(x) Y_n(b) = a_0 y \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cosh(\lambda_n b) \cos(\lambda_n x) = \sin^2(\pi x/a)$$

Huomaamalla, että voimme kirjoittaa  $\sin^2(\pi x/a) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi x/a))$  näemme, että summa saa oikean muodon yläreunallakin, jos valitsemme  $a_0 = 1/(2b)$ ,

$$a_2 = -\frac{1}{2 \sinh(\lambda_2 b)}$$

ja  $a_1 = a_3 = a_4 = \dots = 0$ . Koska vain kaksi kerrointa poikkeaa nolasta, on summan konvergenssi selvä.

Jos yläreunaehdon funktio ei olisi ollut näin näppärästi valittu, niin miten olisimme voineet löytää kertoimet  $a_n$  jolle pätee

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos(\lambda_n x) = f(x)?$$

Aiemmin olemme tulkinneet funktiot vektorieksi tai pisteiksi funktioavaruuksissa. Yritämme seuraavaksi selvittää voisiko tästä analogiasta olla hyötyä tämän

ongelman ratkaisussa. Jos aiemmat funktiot  $\cos(\lambda_n x)$  merkitään  $v_n$ :llä, tulee ky-symys muotoon, mitkä vektorit voidaan esittää muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

missä  $a_n$ :t ovat skalaareja. Tähän liittyen palautamme mieleen seuraavat määritelmät: joukon  $X \subset V$  *virittämä aluavaruus* koostuu kaikista äärellisistä *lineaarikombinaatioista*, eli

$$L(X) = \left\{ \sum_{n=1}^k a_n v_n \mid a_n \in \mathbb{K}, v_n \in V, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tämä näyttää vähän siltä, mitä yllä tarvitsisimme, kun annamme  $k$  jotenkin menä äärettömään.

Äärellinen joukko  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$  on *lineaaristi riippumaton*, jos yhtälöstä

$$\sum_{n=1}^k a_n v_n = 0$$

seuraa, että  $a_n = 0$  kaikilla  $n$ . Yleisesti  $X \subset V$  on lineaaristi riippumaton, jos jokainen äärellinen  $X_k \subset X$  on lineaaristi riippumaton aiemman määritelmän mukaisesti.

**Esimerkki.** Olkoon  $u_1(x) = x^2 + x$  ja  $u_2(x) = x^2 + 1$ . Nyt  $u_1, u_2 \in L^2([0, 1])$ . Joukko  $L(\{u_1, u_2\})$  koostuu polynomeista  $au_1 + bu_2$ , eli kaikista toisen asteen polynomeista  $ax^2 + bx + c$  joille  $a = b + c$ .

**Esimerkki.** Jos asetamme  $u_k(x) = 1 + \dots + x^k$ , niin edelleen  $u_k \in L^2([0, 1])$ . Tässä tapauksessa  $L(\{u_k\})$  koostuu kaikista polynomeista.

Määritellään  $v_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \left(\frac{x}{2}\right)^i$ , jolloin siis  $v_n \in L(\{u_k\})$  jokaiselle  $n$ . Kuitenkin  $v_n(x) \rightarrow \frac{1}{2-x}$  tasaisesti välillä  $[0, 1]$  ja  $\frac{1}{2-x} \notin L(\{u_k\})$ . Tasaisesta suppenemisestä päättelemme heti, että  $v_n \rightarrow \frac{1}{2-x}$  avaruudessa  $L^2$ , joten  $L(\{u_k\})$  ei ole suljettu joukko avaruudessa  $L^2([0, 1])$ .

Meillä on siis syytä olettaa, että kosiini-funktioiden lineaarikombinaatiot voivat olla tärkeitä kun aluamme selvittää mitkä funktiot voidaan esittää muodossa

$$\sum a_n \cos(\lambda_n x).$$

Haetaan taas vihjeitä siitä miten kannattaisi edetä Eukliidisesta tapauksesta. Sanotaan, että tiedämme, että  $w = L(\{u, v\})$ . Miten löydetään  $a, b \in \mathbb{R}$  siten, että  $w = au + bv$ ? Yksi tapa on käyttää skalaarituloa. Jos e.m. yhtälö kerrotaan  $u$ :lla tai  $v$ :llä saadan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} w \cdot u &= a|u|^2 + bv \cdot u \\ w \cdot v &= au \cdot v + b|v|^2, \end{aligned}$$

josta  $a$  ja  $b$  voidaan ratkaista. Skalaaritulolla ei kuitenkaan ole vastinetta yleisessä vektoriavaruudessa. Sen takia määrittelemme seuraavaksi normiavaruuden erikoistapauksen, sisätuloavaruuden.

### 3. SisätuloavaruuDET

Olkoon seuraavassa  $H$  lineaariavaruus, jonka kertojakuntana  $\mathbb{K}$  on joko  $\mathbb{R}$  tai  $\mathbb{C}$ .

**Määritelmä 3.1.** Kuvausta  $(\cdot|\cdot) : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  sanotaan *sisätuloksi*, jos seuraavat ehdot ovat voimassa:

- (S1)  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  aina, kun  $x, y \in H$ .
- (S2)  $(x|x) \geq 0$  aina, kun  $x \in H$ .
- (S3)  $(x|x) = 0$  jos ja vain jos  $x = \bar{0}$ .
- (S4)  $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$  aina, kun  $x, y, z \in H$ .
- (S5)  $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$  aina, kun  $x, y \in H$  ja  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

Paria  $(H, (\cdot|\cdot))$  sanotaan *sisätuloavaruudeksi*, eli pre-Hilbert-avaruudeksi.

Suoraan sisätulon määritelmästä saadaan seuraavat ominaisuudet:

$$\begin{aligned} (x|y + z) &= (x|y) + (x|z) & \forall x, y, z \in H, \\ (x|\lambda y) &= \bar{\lambda}(x|y) & \forall x, y \in H, \lambda \in \mathbb{K}, \\ (\bar{0}|x) &= (x|\bar{0}) = 0 & \forall x \in H, \\ \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \middle| \sum_{j=1}^m \mu_j y_j \right) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_i \bar{\mu}_j (x_i|y_j). \end{aligned}$$

Osoitetaan lisäksi seuraava ominaisuus: Jos  $(x|z) = (y|z)$  aina, kun  $z \in H$ , niin  $x = y$ . Ehtojen (S4) ja (S5) mukaan

$$(x|z) = (y|z) \iff (x - y|z) = 0$$

aina, kun  $z \in H$ . Jos erityisesti  $z = x - y$ , niin ehdon (S3) nojalla

$$(x - y|x - y) = 0 \iff x - y = \bar{0} \iff x = y.$$

**Esimerkki.** Avaruuteen  $\mathbb{R}^n$  voidaan määritellä sisätulo kaavalla

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

missä  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ . Tämä on ns. euklidinen sisätulo. Vastaava sisätulo voidaan määritellä avaruuteen  $\mathbb{C}^n$ :  $(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$ .

Olkoon  $C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\}$ . Tähän reaalikertoimiseen lineaariavaruuteen voidaan määritellä esimerkiksi seuraava sisätulo:

$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \text{aina, kun } f, g \in C([a, b]).$$

Avaruuteen  $C([a, b], \mathbb{C}) = \{f(t) = f_1(t) + if_2(t) \mid f_1, f_2 \in C([a, b])\}$  voidaan määritellä vastaavanlainen sisätulo kuin edellä:

$$(f|g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt \quad \text{aina, kun } f, g \in C([a, b], \mathbb{C}^n).$$

Avaruuteen  $\ell_2 = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C} \mid \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty\}$  käy sisätuloksi

$$(x|y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \bar{y}_k,$$

missä  $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ ,  $y = (y_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ .

**Lause 3.2** (Cauchyn–Schwartzin epäyhtälö). *Jos  $x$  ja  $y$  ovat sisätuloavaruuden  $H$  vektoreita, niin*

$$|(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y).$$

*Yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos vektorit  $x$  ja  $y$  ovat lineaarisesti sidotut.*

TODISTUS. Olkoon  $\lambda \in \mathbb{K}$  mielivaltainen. Tällöin

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + \lambda y|x + \lambda y) = (x|x) + (\lambda y|x) + (x|\lambda y) + (\lambda y|\lambda y) \\ &= (x|x) + \lambda \overline{(x|y)} + \bar{\lambda} (x|y) + |\lambda|^2 (y|y). \end{aligned}$$

Jos  $y = \bar{0}$ , niin  $0 \leq (x|x)$ , mikä on voimassa aina, kun  $x \in H$ . Jos  $y \neq \bar{0}$ , niin valitsemalla  $\lambda = -\frac{(x|y)}{(y|y)}$  saadaan

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x|x) - \frac{|(x|y)|^2}{(y|y)} - \underbrace{\frac{|(x|y)|^2}{(y|y)} + \frac{|(x|y)|^2}{(y|y)}}_{=0} \\ &\iff \frac{|(x|y)|^2}{(y|y)} \leq (x|x) \\ &\iff |(x|y)|^2 \leq (x|x)(y|y). \end{aligned}$$

Yllä olevassa päättelyssä yhtäsuuruus on voimassa jos ja vain jos

$$0 = (x + \lambda y|x + \lambda y) \iff x + \lambda y = \bar{0},$$

eli kun  $x$  ja  $y$  ovat lineaarisesti sidotut. □

**Lause 3.3.** *Jokainen sisätuloavaruus  $H$  on myös normiavaruus, kun normi määritellään kaavalla*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

TODISTUS. Osoitetaan, että normiaksiomit (N1)–(N4) ovat voimassa:

(N1):  $\|x\| = \sqrt{(x|x)} \geq 0$  aina, kun  $x \in H$ .

(N2):  $\|x\| = 0 \iff (x|x) = 0 \iff x = \bar{0}$ .

(N3):  $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \|x\|$ .

(N4): Koska

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y|x + y) \\ &= (x|x) + (y|x) + (x|y) + (y|y) \\ &= (x|x) + \overline{(x|y)} + (x|y) + (y|y) \\ &= \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x|y) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|(x|y)| + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

niin  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  aina, kun  $x, y \in H$ . □

Seuraavan lauseen todistus on harjoitustehtävä.

**Lause 3.4.** *Sisätuloavaruudessa  $H$  on voimassa:*

1.  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$  aina, kun  $x, y \in H$ .
2. Jos  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , niin  $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$  aina, kun  $x, y \in H$ .
3. Jos  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , niin  $(x|y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$  aina, kun  $x, y \in H$ .

Yhtälö 1 on ns. *suunnikassääntö*. Yhtälöt 2 ja 3 ovat ns. *polarisaatiokaavat*. Voidaan osoittaa, että normiavaruus on sisätuloavaruus jos ja vain jos suunnikassääntö on voimassa.

**Lause 3.5.** Jos  $x_n \rightarrow x$  ja  $y_n \rightarrow y$  avaruudessa  $H$ , niin  $(x_n|y_n) \rightarrow (x|y)$ , ts.  $(\cdot|\cdot)$  on jatkuva kuvaus  $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ .

TODISTUS. Olkoot  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  ja  $\|y_n - y\| \rightarrow 0$ . Tällöin

$$\begin{aligned} |(x_n|y_n) - (x|y)| &= |(x_n|y_n) - (x|y_n) + (x|y_n) - (x|y)| \\ &= |(x_n - x|y_n) + (x|y_n - y)| \\ &\leq |(x_n - x|y_n)| + |(x|y_n - y)| \\ &\leq \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\|. \end{aligned}$$

Tässä  $\|y_n\|$  on rajoitettu,  $\|x\|$  on vakio ja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0.$$

Näin ollen  $|(x_n|y_n) - (x|y)| \rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ . □

Palautetaan lineaarialgebrasta mieleen muutamia käsitteitä ja tuloksia. Sisätuloavaruuden  $H$  vektorit  $x$  ja  $y$  ovat *ortogonaaliset*, eli kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos  $(x|y) = 0$ . Tätä merkitään  $x \perp y$ . Vektorijoukko  $S$  on ortogonaalinen, jos

$$(x|y) = 0 \quad \text{aina, kun } x, y \in S \text{ ja } x \neq y.$$

Ortogonaalinen vektorijoukko  $S$  on *ortonormaali*, jos  $\|x\| = 1$  aina, kun  $x \in S$ .

Jos  $S$  on ortogonaalinen vektorijoukko, joka ei sisällä nollavektoria, niin  $S$  on lineaarisesti vapaa. Osoitetaan tämä. Olkoot  $x_1, \dots, x_p \in S$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  ja olkoon

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p = \bar{0}.$$

Tällöin jokaisella  $k = 1, \dots, p$  on

$$\begin{aligned} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p | x_k) &= (\bar{0} | x_k) = 0 \\ \iff \lambda_1 (x_1 | x_k) + \dots + \lambda_k (x_k | x_k) + \dots + \lambda_p (x_p | x_k) &= 0 \\ \implies \lambda_k \|x_k\|^2 &= 0 \\ \implies \lambda_k &= 0. \end{aligned}$$

Näin ollen  $S$  on lineaarisesti vapaa.

Jos  $S$  on vektorijoukko, niin merkitään

$$L(S) := \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \mid \lambda_k \in \mathbb{K}, x_k \in S, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{Z}_+ \right\},$$

jolloin  $L(S)$  on joukon  $S$  virittämä aliavaruus.

Jos  $\{u_1, \dots, u_n, \dots\}$  on sisätuloavaruuden  $H$  lineaarisesti vapaa vektorijoukko, niin on olemassa sellainen avaruuden  $H$  ortonormaali vektorijoukko  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ , että

$$L(\{u_1, \dots, u_n\}) = L(\{e_1, \dots, e_n\})$$

aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Joukon  $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$  konstruointiin voidaan käyttää Gramin–Schmidtin ortonormeerausmenetelmää.

Pythagoraan lause on voimassa sisätuloavaruuksissa:

$$\text{Jos } (x|y) = 0, \text{ niin } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Jos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  on ortogonaalinen vektorijoukko, niin induktiolla voidaan osoittaa, että

$$\left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

**Lause 3.6** (Besselin epäyhtälö). *Olkoon  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormaali vektorijoukko sisätuloavaruudessa  $H$ . Tällöin*

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2$$

ja

$$\sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

aina, kun  $x \in H$ .

TODISTUS. Olkoot  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  mielivaltaisia. Tällöin  $\{\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n\}$  on ortogonaalinen, ja

$$\left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|\lambda_k e_k\|^2 = \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2.$$

Olkoon nyt  $x \in H$  mielivaltainen, jolloin

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 &= \|x\|^2 - \left( x \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right. \right) - \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \left| x \right. \right) + \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n \overline{\lambda_k} (x|e_k) - \sum_{k=1}^n \lambda_k \overline{(x|e_k)} + \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2 + \sum_{k=1}^n |(x|e_k) - \lambda_k|^2. \end{aligned}$$

Valitsemalla  $\lambda_k = (x|e_k)$  jokaisella  $k = 1, 2, \dots, n$  saadaan

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2.$$

Jälkimmäinen epäyhtälö seuraa tästä, sillä vasen, ja siten myös oikea, puoli on ei-negatiivinen.  $\square$

**Huomautus.** Valinta  $\lambda_k = (x|e_k)$  jokaisella  $k = 1, 2, \dots, n$  minimoi lausekkeen

$$(9) \quad \left\| x - \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\|^2.$$

Tämän voi tulkita niin, että pienin etäisyys pisteestä  $x$  vektorien  $\{e_1, \dots, e_n\}$  virittämälle aliavaruudelle on Lausekkeen 9 mukainen kohtisuora etäisyys.

**Seuraus 3.7.** Jos  $(e_k)_{k=1}^{\infty}$  on ortonormaali jono sisätuloavaruudessa  $H$ , niin

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{ja} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x|e_k) = 0$$

aina, kun  $x \in H$ .

TODISTUS. Lauseen 3.6 nojalla

$$\sum_{k=1}^n |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2$$

aina, kun  $n \in \mathbb{Z}_+$ , mistä ensimmäinen väite seuraa. Koska sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2$$

on positiiviterminen ja rajoitettu, se suppenee aina, kun  $x \in H$ . Näin ollen  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x|e_k)^2 = 0$ .  $\square$

Olkoon  $S$  vektoriavaruuden  $V$  osajoukko. Tällöin  $S$ :n virittämä avaruus koostuu  $S$ :n äärellisistä lineaarikombinaatioista. Sitä merkitään  $L(S)$ , eli

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i s_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, s_i \in S \right\}.$$

Olkoon  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ortonormaali vektorijoukko. Vektori

$$y = \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k$$

on vektorin  $x$  kohtisuora projektio aliavaruudelle  $M := L(\{e_1, \dots, e_n\})$ . Merkitään

$$h = x - y = x - \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k.$$

Tällöin  $h \perp M$ , sillä

$$\begin{aligned} (h|e_j) &= \left( x - \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \mid e_j \right) = (x|e_j) - \sum_{k=1}^n (x|e_k) (e_k|e_j) \\ &= (x|e_j) - (x|e_j) \underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

**Määritelmä 3.8.** Olkoon  $S \subset H$  vektorijoukko. Joukkoa

$$S^\perp := \{x \in H \mid (x|z) = 0 \text{ aina, kun } z \in S\}$$

sanotaan joukon  $S$  ortogonaaliseksi komplementiksi. Joukko  $S$  on totaali, jos  $S^\perp = \{\bar{0}\}$ .

**Huomautus.** Osoitetaan, että joukko  $S^\perp$  on avaruuden  $H$  suljettu aliavaruus. Olkoot  $x_1, x_2 \in S^\perp$ , jolloin  $(x_1|z) = (x_2|z) = 0$  aina, kun  $z \in S$ . Siten  $(x_1 + x_2|z) = 0$ , eli  $x_1 + x_2 \in S^\perp$ . Vastaavasti, jos  $x \in S^\perp$  ja  $\alpha \in \mathbb{K}$ , niin  $\alpha x \in S^\perp$ . Näin ollen  $S^\perp$  on aliavaruus.

Osoitetaan nyt, että  $S^\perp$  on suljettu. Olkoon  $x \in \overline{S^\perp}$ , jolloin on olemassa sellainen jono  $(x_n)_{n=1}^\infty \subset S^\perp$ , että  $x_n \rightarrow x$ . Siis  $(x_n|z) = 0$  aina, kun  $z \in S$  ja  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Koska sisätulo on jatkuva, niin

$$(x|z) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n | z \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n | z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Näin ollen  $x \in S^\perp$  ja  $S^\perp$  on suljettu.

Jos  $S \subset H$  ja  $x \in S \cap S^\perp$  ovat mielivaltaisia, niin

$$(x|x) = 0 \implies \|x\|^2 = 0 \implies x = \bar{0}.$$

Näin ollen  $S \cap S^\perp \subset \{\bar{0}\}$ . Kuitenkaan ei välttämättä  $S \cap S^\perp = \{\bar{0}\}$ , sillä  $S$  ei välttämättä sisällä nollavektoria.

Seuraavan lauseen todistus on harjoitustehtävä.

**Lause 3.9.** *Äärellinen ortonormaali vektorijoukko  $S = \{e_1, \dots, e_N\}$  on sisätuloavaruuden  $H$  totaali joukko jos ja vain jos se on avaruuden  $H$  kanta (jolloin  $\dim H = N$ ).*

#### 4. Hilbertavaruudet

Tutkitaan nyt, milloin sisätuloavaruuden  $H$  ääretön ja ortonormaali vektorijoukko  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  on avaruuden  $H$  kanta, ts. milloin

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k \quad \text{ja} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Tarkastellaan osasummia

$$s_n := \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Jos  $n > m$ , niin Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{k=m+1}^n (x|e_k) e_k \right\|^2 = \sum_{k=m+1}^n \|(x|e_k) e_k\|^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^n |(x|e_k)|^2 \|e_k\|^2 \\ &= \sum_{k=m+1}^n |(x|e_k)|^2. \end{aligned}$$

Jono  $(s_n)_{n=1}^\infty$  on siten Cauchyn jono täsmälleen silloin, kun sarja

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2$$

suppenee. Lauseen 3.6 seurauksen nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Näin ollen sarja (10) suppenee aina, kun  $x \in H$ , ja  $(s_n)_{n=1}^\infty$  on aina Cauchyn jono.

Päädymme siis taas tilanteeseen, jossa Cauchy jonon suppeneminen on keskeinen kysymys. Kuten olemme nähneet, avaruutta jossa jokainen Cauchy jono suppenee kutsutaan täydelliseksi. Koska täydelliset sisätuloavaruuudet muodostavat niin tärkeän luokan, otamme tässä yhteydessä käyttöön seuraavan määritelmän.

**Määritelmä 4.1.** Sisätuloavaruuus on *Hilbertin avaruuus*, jos se on sisätulon antaman normin suhteen täydellinen, ts. Banachin avaruuus.

Esimerkiksi avaruudet  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\ell_2$  ja  $L^2(E, \mu)$  ovat Hilbertin avaruuksia.

Äskeinen päätelmämme siis osoittaa, että jos  $H$  on Hilbertin avaruuus, niin jono  $(s_n)_{n=1}^\infty$  suppenee avaruudessa  $H$ . Tällöin on olemassa sellainen  $s \in H$ , että  $s_n \rightarrow s$ . Merkitään

$$s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k, \quad x \in H,$$

ja tutkitaan, milloin  $s = x$ , ts. milloin vektorilla  $x$  on esitys

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k.$$

**Lause 4.2.** Olkoon  $H$  Hilbertin avaruuus ja  $\{e_k\}_{k=1}^\infty \subset H$  ortonormaali joukko. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:

(a) Joukko  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  on totaali.

(b)  $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k$  aina, kun  $x \in H$ .

(c)  $(x|y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) \overline{(y|e_k)}$  aina, kun  $x \in H$  (Parsevalin yhtälö).

(d)  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2$  aina, kun  $x \in H$ .

TODISTUS. Olkoot  $s$  ja  $s_n$  kuten edellä olevassa päättelyssä. Osoitetaan ensin (a)  $\Rightarrow$  (b). Olkoon  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  totaali ja ortonormaali. Aikaisemman päättelyn nojalla

$$\sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k = s_n \rightarrow s = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k.$$

Toisaalta

$$\begin{aligned} (s|e_j) &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} s_n | e_j \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n | e_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k | e_j \right) \\ &= (x|e_j). \end{aligned}$$

Täten  $(s - x|e_j) = 0$  aina, kun  $j \in \mathbb{Z}_+$ . Koska  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  on totaali, niin  $s - x = \bar{0}$ , eli  $x = s$ . Näin ollen ehto (b) on voimassa.

Osoitetaan nyt (b)  $\Rightarrow$  (c). Oletetaan, että

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) e_k \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}(x|y) &= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (y|e_j) e_j \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n ((x|e_k) e_k \mid (y|e_j) e_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x|e_k) \overline{(y|e_k)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (x|e_k) \overline{(y|e_k)}.\end{aligned}$$

Täten ehto (c) on voimassa.

Sijoittamalla ehtoon (c)  $x = y$  saadaan (d), joten tämä implikaatio on selvä.

Osoitetaan lopuksi, että (c)  $\Rightarrow$  (a). Oletetaan, että

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x|e_k)|^2 \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Jos  $x \in \{e_k\}_{k=1}^{\infty \perp}$ , niin  $(x|e_k) = 0$  aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Täten  $\|x\|^2 = 0$ , eli  $x = \bar{0}$ . Näin ollen  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  on totaali. □

Edellisen lauseen nojalla totaalit ortonormaalit joukot ovat erityisen tärkeitä. Sen takia määrittelemme:

**Määritelmä 4.3.** Olkoon  $H$  sisätuloavaruus. Numeroituva vektorijoukko  $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  on avaruuden  $H$  *ortonormaali kanta*, jos se on ortonormaali ja totaali.

**Esimerkki.** (1) Olkoon  $H = \mathbb{R}^n$  ja

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

aina, kun  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ . Olkoot

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0),$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 1).$$

Tällöin  $\{e_1, \dots, e_n\}$  on ortonormaali, ja  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  aina, kun  $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ . Joukko  $\{e_1, \dots, e_n\}$  on avaruuden  $\mathbb{R}^n$  *luonnollinen ortonormaali kanta*.

(2) Olkoon  $H = \mathbb{C}^n$  ja

$$(x|y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

aina, kun  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in H$ . Olkoot vektorit  $e_j$  kuten edellisessä esimerkissä. Tällöinkin  $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  aina, kun  $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$ . Joukko  $\{e_1, \dots, e_n\}$  on avaruuden  $\mathbb{C}^n$  *luonnollinen ortonormaali kanta*.

(3) Olkoon

$$H = \ell_2 = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \subset \mathbb{C} \mid \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty\} \quad \text{ja}$$

$$(x|y) = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}.$$

Tällöin joukko  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ , missä

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots), e_2 = (0, 1, 0, \dots), \dots,$$

on ortonormaali. Jos  $x = (x_1, x_2, \dots) \in H$ , niin  $(x|e_k) = x_k$  ja  $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 < \infty$ . Siis

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |(x|e_k)|^2 \quad \text{ja}$$

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (x|e_k) e_k \\ &= \sum_{k=1}^\infty (x|e_k) e_k. \end{aligned}$$

Näin ollen joukko  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  on avaruuden  $\ell_2$  (luonnollinen) ortonormaali kanta.

(4) Olkoon

$$L^2([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\} \quad \text{ja}$$

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{aina, kun } f, g \in L^2([a, b]),$$

jolloin  $L^2([a, b])$  on Hilbertin avaruus. Sillä on useita ortonormaaleja kantoja.

Jos  $\{e_k\}_{k=1}^\infty$  on Hilbertin avaruuden  $H$  ortonormaali kanta, niin jokaisella vektorilla  $x \in H$  on esitys *Fourier-sarjana*:

$$x = \sum_{k=1}^\infty (x|e_k) e_k.$$

Lukuja  $a_k = (x|e_k)$  sanotaan vektorin  $x$  *Fourier-kertoimiksi*.

Palautetaan mieleen, että avaruus on separoituva, jos sillä on numeroituva, tiheä osajoukko. Jos  $H$  on separoituva ääretönulotteinen Hilbertin avaruus, niin se on isomorfinen Hilbertin avaruuden  $\ell_2$  kanssa, ts. on olemassa sellainen lineaarinen bijektio  $T : H \rightarrow \ell_2$ , että

$$(Tx|Ty)_{\ell_2} = (x|y)_H \quad \text{aina, kun } x, y \in H.$$

Tämän todistaminen on harjoituksena.

**Lause 4.4.** *Hilbertin avaruus on separoituva jos ja vain jos sillä on ortonormaali kanta.*

TODISTUS. Olkoon ensin  $H$  separoituva Hilbertin avaruus ja  $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$  tiheä osajoukko. Tällöin  $S$  on totaali. Muodostetaan joukon  $S$  avulla lineaarisesti vapaa osajoukko ja siitä Gramin–Schmidtin menetelmällä sellainen ortonormaali joukko  $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ , että  $L(E) = L(S)$ . Harjoituksena on osoittaa, että myös  $E$  on totaali, siis kanta.

Olkoon  $E = \{e_k\}_{k=1}^{\infty}$  Hilbertin avaruuden  $H$  ortonormaali kanta, eli  $\overline{L(E)} = H$ . Valitaan

$$\begin{aligned} S &= \{\text{Kaikki rationaalikertoimiset, äärelliset lineaariyhdistelyt} \\ &\quad \text{kantavektoreista}\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^n q_k e_k \mid q_k \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{Z}_+ \right\}, \end{aligned}$$

jolloin  $S$  on numeroituva ja  $\overline{S} = H$ . □

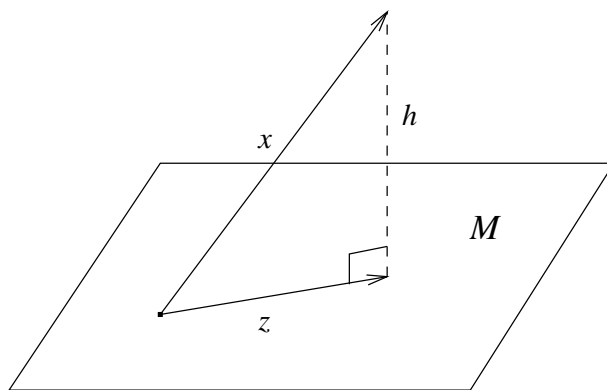
### 5. Projektiolause ja Fréchet'n–Rieszin lause

Olkoon  $H$  sisätuloavaruus ja olkoon  $S \subset H$ . Aikaisemmin määriteltiin ortogonaalinen komplementti  $S^{\perp}$ . Merkitään

$$S^{\perp\perp} := (S^{\perp})^{\perp}.$$

Harjoituksissa on osoitettu, että

- (a) Jos  $S_1 \subset S_2$ , niin  $S_2^{\perp} \subset S_1^{\perp}$ .
- (b)  $S \subset S^{\perp\perp}$ .
- (c)  $(S^{\perp\perp})^{\perp} = S^{\perp}$ .



KUVA 1. Vektorin  $x$  projektio aliavaruudelle  $M$ .

**Lause 5.1** (Projektiolause). *Olkoon  $H$  Hilbertin avaruus ja  $M$  sen aito suljettu aliavaruus. Jos  $x \in H$ , niin on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori  $z \in M$ , että*

$$\|x - z\| = \inf_{m \in M} \|x - m\| = d(x, M).$$

*Lisäksi  $(x - z) \perp M$ .*

TODISTUS. Vertaa Lauseen 3.6 jälkeinen huomautus, jossa  $M$  on äärellisulotteinen ja sillä on ortonormaali kanta. Määritelmän mukaan

$$d(x, M) = \inf_{m \in M} \|x - m\| =: d.$$

Infimumin määritelmän mukaan on olemassa minimoiva jono  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset M$ , jolle

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x - m_k\|.$$

Osoitetaan, että  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$  on Cauchyn jono. Jos  $k, l \in \mathbb{Z}_+$ , niin suunnikassäännön nojalla

$$\begin{aligned} \|m_k - m_l\|^2 &= \|(m_k - x) + (x - m_l)\|^2 \\ &= 2(\|x - m_k\|^2 + \|x - m_l\|^2) - \|2x - (m_k + m_l)\|^2 \\ &= 2(\|x - m_k\|^2 + \|x - m_l\|^2) - 4\|x - \frac{1}{2}(m_k + m_l)\|^2. \end{aligned}$$

Nyt  $\frac{1}{2}(m_k - m_l) \in M$ , joten  $d \leq \|x - \frac{1}{2}(m_k + m_l)\|$ . Näin ollen

$$\lim_{l, k \rightarrow \infty} \|m_k - m_l\|^2 \leq 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0,$$

joten  $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$  on Cauchyn jono suljetussa aliavaruudessa  $M$ . Näin ollen sillä on raja-arvo  $z \in M$ .

Osoitetaan seuraavaksi, että edellä saatu vektori  $z$  on yksikäsitteinen. Oletetaan, että  $\|x - z\| = \|x - w\| = d = d(x, M)$ , missä  $z, w \in M$ . Tällöin  $\frac{1}{2}(z + w) \in M$  ja

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - \frac{1}{2}(z + w)\|^2 = \|\frac{1}{2}(x - z) + \frac{1}{2}(x - w)\|^2 \\ &= 2(\|\frac{1}{2}(x - z)\|^2 + \|\frac{1}{2}(x - w)\|^2) - \|\frac{1}{2}(z - w)\|^2 \\ &= 2(\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{4}d^2) - \frac{1}{4}\|z - w\|^2. \end{aligned}$$

Siis  $\|z - w\|^2 \leq 0$ , eli  $z = w$ .

Osoitetaan vielä, että  $(x - z) \perp M$ . Tehdään vastaoletus: On olemassa sellainen  $y_0 \in M$ , että  $(x - z|y_0) = \lambda \neq 0$ . Valitaan

$$h = z + \lambda \frac{y_0}{\|y_0\|^2} \in M,$$

jolloin

$$\begin{aligned} \|x - h\|^2 &= \|x - z - \lambda \frac{y_0}{\|y_0\|^2}\|^2 = \left(x - z - \lambda \frac{y_0}{\|y_0\|^2} \middle| x - z - \lambda \frac{y_0}{\|y_0\|^2}\right) \\ &= \|x - z\|^2 - \frac{\bar{\lambda}}{\|y_0\|^2} \lambda - \frac{\lambda}{\|y_0\|^2} \bar{\lambda} + \frac{|\lambda|^2}{\|y_0\|^4} \|y_0\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 - \frac{|\lambda|^2}{\|y_0\|^2} \\ &< \|x - z\|^2. \end{aligned}$$

Tämä on vastoin vektorin  $z$  minimiominaisuutta, joten vastaoletus on väärä ja väite on todistettu.  $\square$

**Huomautus.** Lauseessa 5.1 suljettu aliavaruus  $M$  voitaisiin korvata suljetulla konveksilla joukolla. Tällöinkin jokaista pistettä  $x \in H$  kohti löytyy sellainen yksikäsitteinen piste  $z \in M$ , että

$$\|x - z\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|.$$

Tällöin ei kuitenkaan välttämättä ole  $(x - z) \perp M$ .

Tarkastellaan seuraavaksi sisätuloavaruuden  $H$  aliavaruuksia  $M$  ja  $N$ . Merkitään

$$M + N := \{m + n \mid m \in M, n \in N\}.$$

Myös  $M + N$  on avaruuden  $H$  aliavaruus. Jos erityisesti  $M \perp N$ , niin merkitään  $M \oplus N$ . Tällöin kyseessä on ortogonaalinen, eli *suora summa*. Tässä tapauksessa jokaisen vektorin  $x \in M \oplus N$  esitys  $x = m + n$  on yksikäsitteinen, sillä jos olisi

$$x = m + n = m' + n',$$

missä  $m, m' \in M$  ja  $n, n' \in N$ , niin

$$m - m' = n' - n \in M \cap N = \{\bar{0}\}.$$

Siis  $m = m'$  ja  $n = n'$ . Seuraavan lemmän todistus on harjoituksena.

**Lemma 5.2.** *Jos  $M$  ja  $N$  ovat Hilbertin avaruuden  $H$  suljettuja aliavaruuksia ja  $M \perp N$ , niin myös  $M \oplus N$  on suljettu aliavaruus.*

**Lause 5.3.** *Olkkoon  $H$  Hilbertin avaruus ja  $M$  sen suljettu aliavaruus. Tällöin  $H = M \oplus M^\perp$ , ts. jokaisella  $x \in H$  on yksikäsitteinen esitys  $x = m + n$ , missä  $m \in M$  ja  $n \in M^\perp$ .*

TODISTUS. Olkkoon  $x \in H$  mielivaltainen. Jos  $x \in M$ , niin  $x = x + \bar{0}$  on haettu esitys, sillä  $\bar{0} \in M^\perp$ . Jos  $x \notin M$ , niin Lauseen 5.1 nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori  $m \in M$ , että  $x - m \in M^\perp$ . Siten  $m + (x - m)$  on haettu esitys.  $\square$

**Seuraus 5.4.** *Jos  $M$  on Hilbertin avaruuden  $H$  suljettu aliavaruus, niin  $M^{\perp\perp} = M$ .*

TODISTUS. Harjoituksissa on osoitettu, että jokaiselle joukolle pätee  $M \subset M^{\perp\perp}$ , joten riittää osoittaa, että  $M^{\perp\perp} \subset M$ . Olkkoon  $x \in M^{\perp\perp} \subset H$  mielivaltainen. Lauseen 5.3 nojalla  $x = m + n$ , missä  $m \in M \subset M^{\perp\perp}$  ja  $n \in M^\perp$ . Siis

$$M^\perp \ni n = x - m \in M^{\perp\perp},$$

eli

$$x - m \in M^\perp \cap M^{\perp\perp} = \{\bar{0}\}.$$

Näin ollen  $x = m \in M$  ja  $M^{\perp\perp} \subset M$ .  $\square$

**Lause 5.5** (Fréchet'n-Rieszin lause). *Olkkoon  $H$   $\mathbb{K}$ -kertoiminen Hilbertin avaruus ja  $f \in H^*$ , ts.  $f$  on jatkuva lineaarinen funktionaali  $H \rightarrow \mathbb{K}$ . Tällöin on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori  $y \in H$ , että*

$$f(x) = (x|y) \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

TODISTUS. Osoitetaan ensin olemassaolo. Olkkoon  $f \in H^*$  ja merkitään

$$M := \text{Ker } f = \{x \in H \mid f(x) = 0\}.$$

Nyt  $M$  on avaruuden  $H$  lineaarinen aliavaruus. Koska  $f$  on jatkuva, niin  $M$  on suljetun joukon  $\{0\}$  alkukuvana suljettu. Jos  $f$  on nollafunktio, voidaan valita  $y = \bar{0}$ , sillä  $f(x) = 0 = (x|\bar{0})$  aina, kun  $x \in H$ .

Jos  $f$  ei ole nollafunktio, niin  $M$  on aito aliavaruus ja Lauseen 5.3 nojalla  $H = M \oplus M^\perp$ , missä  $M^\perp \neq \{\bar{0}\}$ . Valitaan jokin  $w \in M^\perp \setminus \{\bar{0}\}$ , jolloin  $f(w) \neq 0$ . Lisäksi voidaan olettaa, että  $f(w) = 1$ , sillä ellei näin ole, valitaan vektori  $\frac{w}{f(w)}$ . Olkkoon  $x \in H$  mielivaltainen, jolloin

$$f(x - f(x)w) = f(x) - f(x)f(w) = 0.$$

Siis  $x - f(x)w \in M$ , joten

$$\begin{aligned} 0 &= (x - f(x)w|w) = (x|w) - f(x) \|w\|^2 \\ &\iff f(x) = \frac{(x|w)}{\|w\|^2} = \left(x \middle| \frac{w}{\|w\|^2}\right). \end{aligned}$$

Valitsemalla  $y = \frac{w}{\|w\|^2}$  saadaan väite.

Osoitetaan nyt yksikäsitteisyys. Oletetaan, että on olemassa sellaiset vektorit  $y, z \in H$ , että

$$f(x) = (x|y) = (x|z) \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Tällöin  $(x|y - z) = 0$  aina, kun  $x \in H$ . Erityisesti  $(y - z|y - z) = 0$ , eli  $y - z = \bar{0}$ . Näin ollen  $y = z$ , eli saatu vektori on yksikäsitteinen.  $\square$

Jos  $f \in H^*$ , niin merkitään lauseen 5.5 antamaa vektoria symbolilla  $y_f$ . Siis

$$\begin{aligned} f(x) &= (x|y_f) && \forall x \in H \\ \implies |f(x)| &= |(x|y_f)| \leq \|x\| \|y_f\| && \forall x \in H. \end{aligned}$$

Siten

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} (\|x\| \|y_f\|) = \|y_f\|.$$

Toisaalta  $f(y_f) = (y_f|y_f) = \|y_f\|^2$ , joten

$$f\left(\frac{y_f}{\|y_f\|}\right) = \|y_f\|.$$

Täten  $\|f\| = \|y_f\|$ . Olkoon  $f_y(x) = (x|y)$  aina, kun  $x \in H$ . Tällöin Fréchet'n-Rieszin lause antaa vastaavuudet

$$H^* \ni f \mapsto y_f \in H \quad \text{ja} \quad H \ni y \mapsto f_y \in H^*.$$

Voidaan siis määritellä kuvaus

$$J : H \rightarrow H^*, \quad Jy = f_y.$$

Kuvaus  $J$  on *lineaarinen isometria*, ts.  $\|Jy\| = \|f_y\| = \|y\|$ . Avaruudet  $H$  ja  $H^*$  ovat siten isometrisesti isomorfiset,  $H \simeq H^*$ .

## 6. Hilbertin avaruuden operaattoreista

Seuraavassa oletetaan, että  $H$  on  $\mathbb{K}$ -kertoiminen Hilbertin avaruus. Tarkastellaan rajoitettuja lineaarikuvauksia  $A : H \rightarrow H$ . Siis  $A \in B(H, H) =: B(H)$ . Tällaisia kuvauksia  $A \in B(H)$  kutsutaan Hilbertin avaruuden  $H$  *operaattoreiksi*. Aikaisemmin määriteltiin lineaarisen kuvauksen normi kaavalla

$$(11) \quad \|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Sisätulon ominaisuuksia käyttämällä saadaan

**Lause 6.1.** *Olkoon  $A \in B(H)$ . Tällöin*

$$(12) \quad \|A\| = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax|y)|.$$

$$(13) \quad \|A\|^2 = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax|Ay)|.$$

TODISTUS. Merkitään

$$\|A\|_a = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax|y)| \quad \text{ja} \quad \|A\|_b^2 = \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax|Ay)|.$$

On siis osoitettava, että  $\|A\|_a = \|A\|_b = \|A\|$ . Aluksi saadaan

$$\|A\|_a \leq \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \|Ax\| \|y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|,$$

ja vastaavasti

$$\|A\|_b^2 \leq \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} \|Ax\| \|Ay\| = \|A\|^2.$$

Toisaalta

$$\|A\|_b^2 \geq \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax|Ax)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|^2 = \|A\|^2.$$

Siten  $\|A\|_b = \|A\|$ . Koska

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1, \\ Ax \neq 0}} |(Ax|Ax)| \frac{1}{\|Ax\|} \\ &= \sup_{\substack{\|x\| \leq 1, \\ Ax \neq 0}} \left| \left( Ax \left| \frac{Ax}{\|Ax\|} \right. \right) \right| \leq \sup_{\|x\|, \|y\| \leq 1} |(Ax|y)| \\ &= \|A\|_a, \end{aligned}$$

niin  $\|A\| \leq \|A\|_a$ . Näin ollen  $\|A\|_a = \|A\|$ .  $\square$

Johdetaan seuraavaksi operaattorin  $A \in B(H)$  adjungaatti  $A^* \in B(H)$ . Määritellään jokaista vektoria  $y \in H$  kohti funktionaali

$$f_y : H \rightarrow \mathbb{K}, \quad f_y(x) = (Ax|y).$$

Kuvaus  $f_y$  on lineaarinen, sillä

$$\begin{aligned} f_y(\alpha x_1 + \beta x_2) &= (A(\alpha x_1 + \beta x_2)|y) = (\alpha Ax_1 + \beta Ax_2|y) \\ &= \alpha (Ax_1|y) + \beta (Ax_2|y) \\ &= \alpha f_y(x_1) + \beta f_y(x_2) \end{aligned}$$

aina, kun  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  ja  $x_1, x_2 \in H$ . Lisäksi  $f_y$  on rajoitettu, sillä

$$\begin{aligned} |f_y(x)| &\leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\| \|y\| \|x\| \\ \implies \|f_y\| &\leq \|A\| \|y\| < \infty. \end{aligned}$$

Fréchet'n–Rieszin lauseen nojalla on olemassa sellainen yksikäsitteinen vektori  $z \in H$ , että

$$f_y(x) = (x|z) \quad \text{aina, kun } x \in H.$$

Näin ollen  $y \mapsto f_y \mapsto z$  ja saadaan kuvaus

$$A^* : H \rightarrow H, \quad A^*y = z,$$

joka toteuttaa yhtälön

$$f_y(x) = (Ax|y) = (x|A^*y) \quad \text{aina, kun } x, y \in H.$$

Osoitetaan nyt, että myös  $A^* \in B(H)$ , ts. että  $A^*$  on lineaarinen ja rajoitettu. Osoitetaan ensin lineaarisuus. Nyt

$$\begin{aligned}(x|A^*(y_1 + y_2)) &= (Ax|y_1 + y_2) = (Ax|y_1) + (Ax|y_2) \\ &= (x|A^*y_1) + (x|A^*y_2) \\ &= (x|A^*y_1 + A^*y_2)\end{aligned}$$

aina, kun  $x \in H$ . Siten  $A^*(y_1 + y_2) = A^*y_1 + A^*y_2$  aina, kun  $y_1, y_2 \in H$ . Vastaavasti

$$\begin{aligned}(x|A^*(\lambda y)) &= (Ax|\lambda y) = \overline{\lambda}(Ax|y) = \overline{\lambda}(x|A^*y) \\ &= (x|\lambda A^*y)\end{aligned}$$

aina, kun  $x \in H$ . Siis  $A^*(\lambda y) = \lambda A^*y$  aina, kun  $y \in H$  ja  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Täten  $A^*$  on lineaarinen. Osoitetaan nyt, että  $A^*$  on rajoitettu. Fréchet'n–Rieszin lauseesta saatiin, että

$$\|f_y\| = \|A^*y\| \quad \text{ja} \quad \|f_y\| \leq \|A\| \|y\|.$$

Täten  $\|A^*y\| \leq \|A\| \|y\|$  ja

$$(14) \quad \|A^*\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|A^*y\| \leq \|A\|.$$

Näin ollen  $A^*$  on myös rajoitettu ja siten  $A^* \in B(H)$ .

**Määritelmä 6.2.** Operaattoria  $A^* \in B(H)$ , jolle

$$(Ax|y) = (x|A^*y) \quad \text{aina, kun } x, y \in H,$$

sanotaan operaattorin  $A \in B(H)$  *adjungoiduksi operaattoriksi*.

**Esimerkki.** Olkoon  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ja

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+ik}{1+k^2} x_k e_k \quad \text{aina, kun } x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Tutkitaan, onko  $A \in B(\ell_2)$ . Nyt

$$\left| \frac{1+ik}{1+k^2} x_k \right|^2 = \frac{|1+ik|^2}{(1+k^2)^2} |x_k|^2 = \frac{1+k^2}{(1+k^2)^2} |x_k|^2 \leq |x_k|^2$$

aina, kun  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Siten  $Ax \in \ell_2$  aina, kun  $x \in \ell_2$ . Edelleen  $A$  on selvästi lineaarinen, ja  $A$  on rajoitettu, sillä

$$\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2 \quad \text{aina, kun } x \in \ell_2.$$

Näin ollen  $A \in B(\ell_2)$ , joten voidaan määrätä  $A^*$ . Nyt

$$(Ax|y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+ik}{1+k^2} x_k \overline{y_k} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \frac{\overline{1-ik}}{1+k^2} y_k = (x|A^*y)$$

aina, kun  $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ ,  $y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2$ . Siten

$$A^*y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-ik}{1+k^2} y_k e_k \quad \text{aina, kun } y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

### 7. Lebesgue avaruuden $L^2$ ortonormaali kanta

Tässä luvussa osoitamme vihdoin, että  $\{\cos(nx), \sin(nx)\}$  muodostaa joukon  $L^2([-\pi, \pi])$  ortonormaalin kannan.

Todistus on näppärämpi tehdä kompleksitasossa. Olkoon nyt  $u$  ja  $v$  integroituvia funktioita kuten aiemmin. Silloin kompleksiarvoista funktiota  $f = u + iv$  sanotaan integroituvaksi, ja määrittelemme

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E u(x) d\mu(x) + i \int_E v(x) d\mu(x).$$

Tarkastelemme seuraavaksi tapausta  $E = [-\pi, \pi]$  ja  $\mu = \frac{m}{2\pi}$ , missä  $m$  on yksilotteinen Lebesgue'in mitta. Tässä tapauksessa siis avaruuden  $L^2(E, \mu)$  sisätulo on

$$(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

*Trigonometrisella polynomilla* tarkoitamme muotoa

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^k a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

olevaa funktiota, missä  $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ . Eulerin yhtälön

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

avulla näemme, että  $f$  on trigonometrinen polynomi täsmälleen silloin, kun se voidaan esittää muodossa

$$f(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Merkitään  $u_n(t) = e^{int}$ . Yksinkertaisella laskulla saamme

$$(u_m|u_n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \delta_{mn},$$

eli 1 jos  $m = n$  ja 0 muutoin. Näin ollen  $(u_m)$  on ortonormaali joukko. Tavoitteena on osoittaa se lisäksi kannaksi.

Osoitamme tämän kolmessa askeleessa. Ensimmäinen väite on, että riittää osoittaa, että  $L((u_m))$  on tiheä avaruudessa  $L^2(E, \mu)$ . Tämä seuraa kuten Lauseessa 4.4.

Haluamme siis nyt osoittaa, että jokaiselle  $\epsilon > 0$  ja  $f \in L^2(E, \mu)$  on olemassa trigonometrinen polynomi  $P$  jolle  $\|f - P\|_2 < \epsilon$ . Jaamme tämän todistuksen kahtia, eli osoitamme ensin, että löytyy jatkuva funktio  $g \in C(E)$  jolle  $g(-\pi) = g(\pi)$  ja  $\|f - g\|_2 < \epsilon/2$ . Sitten konstruoimme trigonometrisen polynomin  $P$  jolle  $\|g - P\|_2 < \epsilon$ , josta väite sitten seuraakin suoraan kolmioepäytälön avulla.

Jäljellä on siis kahden lauseen todistus:

**Lause 7.1.** *Olkoon  $g \in C(E)$  funktio jolle  $g(-\pi) = g(\pi)$ . Funktiota  $g$  voidaan approksiomoida tasaisesta trigonometrisillä polynomeilla, eli jokaiselle  $\epsilon > 0$  on olemassa trigonometrinen polynomi  $P$  jolle  $|g(x) - P(x)| < \epsilon$  jokaiselle  $x \in E$ .*

Féjer osoitti 1904, että trigonometriseksi polynomiksi yllä olevassa lauseessa voimme valita funktion  $g$  Fourier osasummien keskiarvot, eli  $P_N = (s_1 + \dots + s_N)/N$ .

**TODISTUS.** Oletetaan, että meillä on jono trigonometrisiä polynomeja  $Q_k: E \rightarrow \mathbb{R}$  jotka toteuttavat seuraavat ehdot:

- (1)  $Q_k \geq 0$ ;
- (2)  $\int_E Q_k d\mu = 1$ ; ja
- (3) Jokaisella  $\delta > 0$ ,  $Q_k \rightarrow 0$  tasaisesti joukossa  $[-\pi, -\delta] \cup [\pi, 1] =: E_\delta$ .

(Näiden olemassaolo todistetaan myöhemmin.)

Jatketaan funktioita  $g$  ja  $Q_k$  periodisina koko reaaliakselille, periodina  $2\pi$  ja määrittellen

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)Q_k(s) ds.$$

Muuttujavaihdolla  $s = t - r$  saamme

$$P_k(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} g(r)Q_k(t-r) dr = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(r)Q_k(t-r) dr,$$

kun toisessa askeleessa käytetään periodisuutta hyväksi.

Koska  $Q_k$  on trigonometrinen polynomi, pätee

$$Q_k(t-r) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{k,n} e^{in(t-r)} = \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{k,n} e^{int} e^{-inr}.$$

Näin ollen saamme

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N_k}^{N_k} c_{k,n} e^{int} \int_{-\pi}^{\pi} g(r) e^{-inr} dr,$$

kun käytetään integraalin äärellistä additiivisuutta. Nyt jokainen määrätty integraali antaa vain tietyn kompleksiluvun, joka ei riipu  $t$ :stä, joten huomaamme, että  $P_k$  on myös trigonometrinen polynomi.

Itse asiassa,  $P_k$  on juuri se polynomi jota etsimme. Kiinnitetään  $\epsilon > 0$  ja valitaan  $\delta > 0$  niin, että  $|g(s) - g(t)| < \epsilon$  kun  $|s - t| < \delta$ . Tämä on mahdollista, koska jatkuva funktio  $g$  on tasaisesti jatkuva kompaktilla joukolla  $E$ . Funktioiden  $Q_k$  ominaisuuden (2) nojalla saamme

$$P_k(t) - g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [g(t-s) - g(t)]Q_k(s) ds.$$

Käytämme nyt kolmioepäyhtälöä, ja jaamme sitten integraalin kahteen osaan:

$$\begin{aligned} & |P_k(t) - g(t)| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t-s) - g(t)|Q_k(s) ds \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_{E_\delta} |g(t-s) - g(t)|Q_k(s) ds + \frac{1}{2\pi} \int_{E \setminus E_\delta} |g(t-s) - g(t)|Q_k(s) ds. \end{aligned}$$

Jälkimmäisessä integraalissa on  $|(t-s) - t| < \delta$ , joten  $g$  jatkuvuuden nojalla saamme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E \setminus E_\delta} |g(t-s) - g(t)|Q_k(s) ds < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{E \setminus E_\delta} Q_k(s) ds \leq \frac{\epsilon}{2\pi}.$$

Edellisessä integraalille arvioimme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{E_\delta} |g(t-s) - g(t)|Q_k(s) ds \leq \frac{1}{\pi} \sup_{s \in E} |g(s)| \int_{E_\delta} Q_k(s) ds.$$

Koska  $Q_k \rightarrow 0$  tasaisesti joukossa  $E_\delta$ , saadaan tämäkin term pienemmäksi kuin  $\epsilon$  valitsemalla tarpeeksi suuri  $k$ . Näin ollen  $|P_k(t) - g(t)| \leq C\epsilon$ , ja väite on osoitettu, funktioiden  $Q_k$  konstruktioita vaille.

Funktioiksi  $Q_k$  voidaan valita

$$Q_k(t) = c_k \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k,$$

missä vakio  $c_k$  valitaan niin, että ehto (2) täyttyy. Ehto (1) on selvä, joten ainoastaan (3) on todennettava. Vakion  $c_k$  määritelmän perusteella pätee

$$\begin{aligned} 1 &= 2c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k ds \\ &\geq 2c_k \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^k \sin t ds \\ &= -c_k \frac{1}{2^k \pi} \int_0^\pi \frac{1}{k+1} (1 + \cos t)^{k+1} \\ &= \frac{2c_k}{(k+1)\pi}. \end{aligned}$$

Eli,  $c_k \leq \frac{\pi}{2}(k+1)$ . Näin saamme

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi}{2}(k+1) \left( \frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^k \rightarrow 0,$$

kun  $\delta > 0$  ja  $t \in E_\delta$ . Siis  $Q_k$  toteuttaa kaikki vaaditut ehdot, eli todistus on on valmis.  $\square$

Vielä on jäljellä toisen osan todistus, eli, että jatkuvat funktiot ovat tiheässä.

**Lause 7.2.** *Joukko  $C(E)$  on tiheä avaruudessa  $L^2(E, \mu)$ . Tarkemmin, jokaiselle  $f \in L^2(E, \mu)$  ja  $\epsilon > 0$  löytyy  $g \in C(E)$  jolle  $g(-\pi) = g(\pi)$  ja  $\|f - g\|_2 < \epsilon$ .*

TODISTUS. Olkoon  $f \in L^2(E, \mu)$  ja  $\epsilon > 0$ . Kun  $M > 0$  määritellään  $f_M(t) = \max\{-M, \min\{f(t), M\}\}$ , eli  $f_M$  on  $f$  katkaistu tasoilla  $\pm M$ . Nyt  $f_M \rightarrow f$  pisteittäin  $E$ :ssä. Lisäksi,  $|f_M| \leq |f|$ , joten Dominoidun suppenemisen lauseen avulla saamme, että  $f_M \rightarrow f$  avaruudessa  $L^2(E, \mu)$ . Voimme siis valita luvun  $M$  niin suureksi, että  $\|f - f_M\|_2 < \epsilon$ .

Koska  $f_M$  on mitallinen, on Lauseen 7.3 (Lusin Lause) nojalla olemassa jatkuva funktio  $g \in C(E)$  jolle  $g(-\pi) = g(\pi)$ ,  $\sup |g| \leq \sup |f_M|$  ja  $\mu(\{f \neq g\}) < \epsilon^2/M$ . Näin saamme

$$\begin{aligned} \|f_M - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi |f_M(s) - g(s)|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\{f \neq g\}} |f_M(s) - g(s)|^2 ds \\ &\leq 4 \sup |f_M|^2 \frac{1}{2\pi} \mu(\{f \neq g\}) \\ &\leq \frac{2}{\pi} \epsilon^2. \end{aligned}$$

Väite seuraa tästä kolmio epäyhtälöllä,  $\|f - g\|_2 \leq \|f - f_M\|_2 + \|f_M - g\|_2$ .  $\square$

**Huomautus.** Edellistä kaksi lausetta pätevät myös avaruuksissa  $L^p$ . Todistus tässä tapauksessa on sama kuin yllä annettu.

Edellisessä todistuksessa käytimme Lusinin lausetta joka on seuraava:

**Lause 7.3.** *Olkoon  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  mitallinen funktio. Jokaiselle  $\epsilon > 0$  on olemassa jatkuva funktio  $g \in C([a, b])$  joka yhtyy funktioon  $f$  joukossa  $E \subset [a, b]$  jolle  $\mu([a, b] \setminus E) < \epsilon$ .*

Jos tietää, että jatkuvat funktiot ovat tiheässä avaruudessa  $L^1$ , voi Lusinin lauseen todistaa helposti Egorovin lauseen avulla. Kuitenkin yllä olemme käyttäneet Lusinin lausetta tiheyden todistamiseen, joten tämä reitti johtaisi kiertopäätelmään.

**Essee tehtävä 4.** Tehtävänä on todistaa Lusinin lause käyttämättä hyväksi tietoa, että jatkuvat funktiot ovat tiheitä.

**Lisähavaintoja.** Jos  $f \in L^1(E, \mu)$ , niin voimme määritellä Fourier kertoimet kaavan

$$\hat{f}(n) = \int_E f(t) e^{-int} d\mu$$

avulla, koska  $|e^{-int}| = 1$ , joten  $f(t)e^{-int} \in L^1(E, \mu)$ . Kuten aiemmin, määrittelemme Fourier osasummat

$$s_N = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$$

ja Fourierin sarjan

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Koska  $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  on  $L^2$ :n kanta, saadaan Lauseesta 4.2, kun  $f \in L^2$ , että

- $s_N \rightarrow f$  avaruudessa  $L^2$ , joten erityisesti  $s_N(x) \rightarrow f(x)$  m.k.  $x$ ;
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}$  [Parsevalin yhtälö]; ja
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$ .

Jos sen sijaan pätee ainoastaan  $f \in L^1$ , on teorian kehittäminen vaikeampaa.

Lopuksi todistetaan Riemann–Lebesgue'in lemma, joka kertoo kuitenkin jotain Fourier kertoimien käyttäytymisestä  $L^1$  funktioille.

**Lause 7.4.** *Jos  $f \in L^1(E, \mu)$ , niin  $\hat{f} \rightarrow 0$  kun  $n \rightarrow \pm\infty$ .*

**TODISTUS.** Olkoon  $f \in L^1(E, \mu)$  ja  $\epsilon > 0$ . Aikaisempien todistusten nojalla voimme valita trigonometrisen polynomin  $P$  niin, että  $\|f - P\|_1 < \epsilon$ . Olkoon  $N$  polynomin  $P$  aste, eli pienin luku jolle  $P$  voidaan esittää summana  $-N$ :stä  $N$ :n. Silloin  $(P|u_k) = 0$  kun  $|k| > N$ , koska kantafunktiot  $u_m$  ovat ortonormaaleja. Näin ollen saamme

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - P(t)) e^{-ikt} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - P(t)| dt < \epsilon, \end{aligned}$$

joten  $\hat{f} \rightarrow 0$ , kuten väitettiin. □

Kaavassa

$$\hat{f}(n) = \int_E f(t)e^{-int} d\mu$$

voisimme myös tutkia tilannetta, jossa  $n$  ei ole kokonaisluku. Tällöin ei ole enää tärkeätä, että  $f$  on  $2\pi$  periodinen, mutta toisaalta integrointi pitää ulottaa yli koko reaaliakselin. Tällöin päädyimme *Fourier muunnokseen*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi t} d\mu,$$

jota ei kuitenkaan tutkita lähemmin tämän kurssin puitteissa.

## Metriset avaruudet

### 1. Metrysten avaruuksien perusominaisuudet

**Määritelmä 1.1.** Olkoon  $E$  epätyhjä joukko. Kuvaus  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  on *metriikka* joukossa  $E$ , jos

- (M1)  $d(x, y) \geq 0$  aina, kun  $x, y \in E$ .
- (M2)  $d(x, y) = 0$  jos ja vain jos  $x = y$ .
- (M3)  $d(x, y) = d(y, x)$  aina, kun  $x, y \in E$ .
- (M4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  aina, kun  $x, y, z \in E$ .

Paria  $(E, d)$  sanotaan *metriseksi avaruudeksi*.

Pisteen  $x \in E$  *etäisyys* joukosta  $A \subset E$  on

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Ehto (M4) on ns. *kolmioepäyhtälö*. Jos metriikasta  $d$  ei ole epäselvyyttä, puhutaan metrisestä avaruudesta  $E$ .

**Esimerkki.** (1) Olkoon  $E \neq \emptyset$  ja  $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \neq y, \\ 0, & \text{jos } x = y. \end{cases}$

Tällöin  $(E, d)$  on ns. *diskreetti metrinen avaruus*.

(2) Avaruuden

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

alkioiden  $x = (x_1, \dots, x_n)$  ja  $y = (y_1, \dots, y_n)$  välinen etäisyys voidaan määritellä esimerkiksi seuraavilla tavoilla:

$$(a) \quad d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2},$$

$$(b) \quad d_2(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|,$$

$$(c) \quad d_3(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|.$$

Etäisyys  $d_1$  on ns. *euklidinen etäisyys*. Jos  $n = 1$ , niin  $d_1(x, y) = |x - y|$ . Jos  $n = 2$ ,  $x = (x_1, x_2)$  ja  $y = (y_1, y_2)$ , niin

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Osoitetaan kolmioepäyhtälö metriikoille  $d_2$  ja  $d_3$ . Jos  $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ , niin

$$\begin{aligned} d_2(x, z) &= \sum_{j=1}^n |x_j - z_j| = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j + y_j - z_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|x_j - y_j| + |y_j - z_j|) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j| + \sum_{j=1}^n |y_j - z_j| \\ &= d_2(x, y) + d_2(y, z) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} d_3(x, z) &= \max |x_j - z_j| = \max |x_j - y_j + y_j - z_j| \\ &\leq \max(|x_j - y_j| + |y_j - z_j|) \leq \max |x_j - y_j| + \max |y_j - z_j| \\ &= d_3(x, y) + d_3(y, z). \end{aligned}$$

(3) Pari  $(E, d)$ , missä

$$\begin{aligned} E &= \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ rajoitettu}\} \quad \text{ja} \\ d(f, g) &= \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|, \end{aligned}$$

on metrinen avaruus.

(4) Olkoon

$$\begin{aligned} E &= \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\} \quad \text{ja} \\ d(f, g) &= \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \end{aligned}$$

ts.  $d(f, g)$  on funktion  $|f - g|$  Riemannin integraali välillä  $[0, 1]$ . Tällöin pari  $(E, d)$  on metrinen avaruus. Osoitetaan ehdot (M2) ja (M4).

$$(M2): \quad d(f, g) = 0 \iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0, 1] \iff f = g.$$

$$\begin{aligned} (M4): \quad d(f, h) &= \int_0^1 |f(x) - h(x)| dx \\ &= \int_0^1 |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx + \int_0^1 |g(x) - h(x)| dx \\ &= d(f, g) + d(g, h) \quad \forall f, g, h \in E. \end{aligned}$$

**Määritelmä 1.2.** Olkoon  $(E, d)$  metrinen avaruus,  $a \in E$  ja  $r > 0$ . Joukkoa  $B(a, r) := \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$  sanotaan  $a$ -keskiseksi,  $r$ -säteiseksi *avoimeksi palloksi*.

**Esimerkki.** Jos  $E = \mathbb{R}$  ja  $d(x, y) = |x - y|$  aina, kun  $x, y \in \mathbb{R}$ , niin  $B(a, r) = ]a - r, a + r[$ .

Olkoon  $(E, d)$  euklidinen taso  $\mathbb{R}^2$ ,  $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$  ja  $r > 0$ . Tällöin  $B(a, r) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r\}$ .

Tarkastellaan diskreettiä metristä avaruutta  $(E, d)$ . Olkoon  $a \in E$ , jolloin  $B(a, 1) = \{x \in E \mid d(x, a) < 1\} = \{a\}$ . Yleisesti

$$B(a, r) = \begin{cases} \{a\}, & \text{jos } 0 < r \leq 1, \\ E, & \text{jos } r > 1. \end{cases}$$

Olkoon

$$E = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ jatkuva}\} \quad \text{ja} \\ d(f, g) = \max_{t \in [0, 1]} |f(t) - g(t)|.$$

Olkoon lisäksi  $a(t) = t$  aina, kun  $t \in [0, 1]$ , jolloin  $a \in E$ . Nyt esimerkiksi  $B(a, \frac{1}{2}) = \{f \in E \mid t - \frac{1}{2} < f(t) < t + \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0, 1]\}$ .

**Määritelmä 1.3.** Metrinen avaruuden  $(E, d)$  osajoukko  $A$  on *avoin*, jos jokaista  $a \in A$  kohti on olemassa sellainen  $r > 0$ , että  $B(a, r) \subset A$ . Joukko  $A$  on *suljettu*, jos sen komplementti on avoin.

**Esimerkki.** Avoin pallo on avoin joukko. *Suljettu pallo*

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}$$

on suljettu joukko. Todistus jätetään harjoitukseksi. *Pallon kuori* on joukko

$$S(a, r) := \{x \in E \mid d(x, a) = r\}.$$

Selvästi  $S(a, r) = \overline{B}(a, r) \cap (B(a, r))^c$ . Pallon kuori on myös suljettu joukko.

**Lause 1.4.** *Olkoon  $E$  metrinen avaruus.*

- (a) *Olkoon  $I$  mielivaltainen indeksijoukko ja olkoon  $\{A_j \mid j \in I\}$  perhe avaruuden  $E$  avoimia joukkoja. Tällöin joukko  $\cup_{j \in I} A_j$  on avoin.*  
 (b) *Olkoot  $A_1, \dots, A_n$  avaruuden  $E$  avoimia joukkoja. Tällöin joukko  $\cap_{j=1}^n A_j$  on avoin.*

TODISTUS. (a) Olkoon  $a \in \cup_{j \in I} A_j$  mielivaltainen. Tällöin on olemassa sellainen  $j_0 \in I$ , että  $a \in A_{j_0}$ . Koska  $A_{j_0}$  on avoin, on olemassa sellainen  $r > 0$ , että

$$B(a, r) \subset A_{j_0} \subset \bigcup_{j \in I} A_j.$$

Näin ollen  $\cup_{j \in I} A_j$  on avoin.

- (b) Riittää tarkastella tapausta  $n = 2$  ja käyttää sitten induktiota. Olkoot siis  $A_1$  ja  $A_2$  avoimia osajoukkoja avaruudessa  $E$ . Olkoon  $a \in A_1 \cap A_2$ , jolloin  $a \in A_1$  ja  $a \in A_2$ . Koska  $A_1$  ja  $A_2$  ovat avoimia, niin on olemassa sellaiset  $r_1, r_2 > 0$ , että

$$B(a, r_1) \subset A_1 \quad \text{ja} \quad B(a, r_2) \subset A_2.$$

Valitaan  $r = \min\{r_1, r_2\}$ , jolloin  $B(a, r) \subset A_1 \cap A_2$ . Näin ollen  $A_1 \cap A_2$  on avoin. □

**Määritelmä 1.5.** Metrinen avaruuden  $E$  osajoukkoa  $A$  sanotaan *rajoitetuksi*, jos on olemassa sellaiset  $a \in E$  ja  $R > 0$ , että  $A \subset B(a, R)$ . Jos  $A$  on rajoitettu, niin lukua

$$\delta(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y) < \infty$$

sanotaan joukon  $A$  *halkaisijaksi*.

**Määritelmä 1.6.** Metrinen avaruuden  $E$  piste  $x$  on joukon  $A \subset E$  *kasautumispiste*, jos jokaisella  $r > 0$  pallo  $B(x, r)$  sisältää pisteestä  $x$  eriäviä joukon  $A$  pisteitä, ts. jos  $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$  jokaisella  $r > 0$ .

**Esimerkki.** Joukolla  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  ei ole kasautumispisteitä. Joukon  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  kasautumispisteenä on jokainen  $x \in \mathbb{R}$ . Näin ollen joukon kasautumispiste voi olla joukon itsensä tai sen komplementin piste.

**Määritelmä 1.7.** Joukkoa  $\bar{A} := A \cup \{\text{Joukon } A \text{ kasautumispisteet}\}$  sanotaan joukon  $A$  *sulkeumaksi*.

**Huomautus.** Aina on voimassa  $A \subset \bar{A}$ . Koska

$$\bar{A} = \{x \in E \mid B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0\},$$

niin

$$x \in \bar{A} \iff d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = 0.$$

**Lause 1.8.** Jos  $A \subset E$  on mielivaltainen osajoukko ja  $F \subset E$  sellainen suljettu joukko, että  $A \subset F$ , niin  $\bar{A} \subset F$  (ts.  $\bar{A}$  on pienin suljettu joukko, joka sisältää joukon  $A$ ).

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

**Huomautus.** Joukko  $A$  on suljettu täsmälleen silloin, kun  $\bar{A} = A$ . Koko avaruus  $E$  on avoin, joten  $\emptyset = E^c$  on suljettu. Toisaalta  $\bar{E} = E$ , joten  $E$  on suljettu ja  $\emptyset = E^c$  on avoin. Joukot  $\emptyset$  ja  $E$  ovat sekä avoimia, että suljettuja.

**Määritelmä 1.9.** Olkoon  $A \subset E$ . Joukkoa  $\partial A := \bar{A} \cap \overline{A^c}$  sanotaan joukon  $A$  *reunaksi*.

**Esimerkki.** Olkoon  $E = \mathbb{R}$ ,  $d(x, y) = |x - y|$  ja  $A = ]a, b[$ . Tällöin

$$\begin{aligned} \bar{A} &= [a, b], \quad A^c = ]-\infty, a] \cup [b, \infty[ \quad \text{ja} \\ \overline{A^c} &= ]-\infty, a] \cup [b, \infty[ = A^c. \end{aligned}$$

Siten  $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c} = \{a, b\}$ . Joukolle  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  on  $\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$ .

**Määritelmä 1.10.** Olkoon  $A \subset E$ . Pistettä  $x \in A$  sanotaan joukon  $A$  *sisäpisteeksi*, jos on olemassa sellainen  $r > 0$ , että  $B(x, r) \subset A$ . Sisäpisteiden joukolle käytetään merkintää  $\text{int}(A)$ .

**Huomautus.** Joukko  $A$  on avoin täsmälleen silloin, kun  $A = \text{int}(A)$ .

**Määritelmä 1.11.** Joukkoa  $A \subset E$  sanotaan *tiheäksi* avaruudessa  $E$ , jos  $\bar{A} = E$ . Metristä avaruutta  $E$  sanotaan *separoituvaksi*, jos on olemassa tiheä ja (korkeintaan) numeroituva osajoukko  $A \subset E$ .

**Esimerkki.** Olkoon  $E = \mathbb{R}$  ja  $d(x, y) = |x - y|$ . Joukko  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  on numeroituva ja  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ . Näin ollen  $\mathbb{Q}$  on tiheä avaruudessa  $\mathbb{R}$  ja  $\mathbb{R}$  on separoituva.

Tarkastellaan euklidista avaruutta  $\mathbb{R}^n$  ja sen osajoukkoa

$$\mathbb{Q}^n = \{q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \mid q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}\}.$$

Harjoitustehtävänä on osoittaa, että  $\mathbb{Q}^n$  on numeroituva. Lisäksi  $\overline{\mathbb{Q}^n} = \mathbb{R}^n$ , joten  $\mathbb{R}^n$  on separoituva.

Kaikki metriset avaruudet eivät ole separoituvia. Esimerkiksi  $(E, d)$ , missä

$$E = \ell_\infty = \{x = (x_k)_{k=1}^\infty \mid (x_k)_{k=1}^\infty \text{ on rajoitettu reaalilukujono}\} \quad \text{ja}$$
$$d(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} |x_k - y_k|,$$

ei ole separoituva.

## Hakemisto

- $\sigma$ -algebra, 7
- absoluuttisesti jatkuva, 43
- adjungaatti, 65, 66
- algebra, 7
- avoin
  - joukko, 74
  - pallo, 73
  - väli, 16
- Banach avaruus, 48
- Besselin epäyhtälö, 55
- bijektio, 5
- Borelin joukko, 8
- Borelin joukkoluokka, 8
- Cauchy jono, 48
- Cauchyn–Schwartzin epäyhtälö, 53
- De Morganin lait, 5
- esimitta, 14
- Fourier-kerroin, 60
- Fourier-sarja, 60
- Fréchet'n–Rieszin lause, 63
- halkaisija, 74
- Hilbertin avaruus, 58
- injektio, 5
- integraalifunktio, 41
- integroituva, 33
- karakteristinen funktio, 20
- kasautumispiste, 75
- kohtisuora projektiio, 56
- kolmioepäyhtälö, 72
- lebesgue-mitallinen joukko, 16
- Lebesguen integraali, 25
- Lebesguen mitta, 16
- Lebesguen ulkomitta, 16
- lineaarinen isometria, 64
- mahtavuus, 5
- melkein kaikkialla (m.k.), 23
- metriikka, 72
  - euklidinen, 72
  - metrinen avaruus, 72
    - diskreetti, 72
- mitallinen funktio, 21
- mitallinen joukko
  - ulkomitan suhteen, 11
- mitta, 8
  - $\sigma$ -äärellinen mitta, 9
  - äärellinen mitta, 9
  - Diracin  $\delta$ -mitta, 9
  - geometrinen mitta, 16
  - todennäköisyysmitta, 9
- mitta-avaruus, 18
- normi
  - normikuvaus, 46
- normiavaruus, 47
- numeroituva, 5
- operaattori, 64
  - adjungoitu, 65, 66
- ortogonaalinen
  - komplementti, 56
  - summa, 63
  - vektorit, 54
- ortonormaali
  - kanta, 59
    - luonnollinen, 59
  - vektori joukko, 54
- peiteluokka, 14
- polarisaatiokaavat, 54
- Projektiolause, 61
- Pythagoraan lause, 55
- rajoitettu
  - joukko, 74
- reuna, 75
- separoituva avaruus, 75
- sisäpiste, 75
- sisätulo
  - euklidinen, 52
  - kuvaus, 52
- sisätuloavaruus, 52
- suljettu
  - joukko, 74
  - pallo, 74

sulkeuma, 75

suora summa, 63

surjektio, 5

suunnikassääntö, 54

täydellinen, 48

tiheä joukko, 75

totaali joukko, 56

ulkomitta, 11

yksinkertainen funktio, 25

yksinkertaisen funktion normaaliesitys, 25