

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 18.1

- (1) Osoita, että $\mathbb{Q}^n$ on numeroituva.
- (2) Tarkastellaan Euklidista avaruutta $\mathbb{R}^n$. Onko totta, että numeroituva yhdiste suljetuista joukoista on suljettu?
- (3) Määritellään metriikka joukossa $\mathbb{R}^n$ seuraavasti:

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{jos } x = cy \text{ jollain } c \in \mathbb{R}, \\ |x| + |y|, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Piirrä avoimet pallot $B(0, 1)$, $B(e_1, 1/2)$, $B(e_1, 1)$ ja $B(e_1, 2)$. (Tässä e_1 merkkää ensimmäistä kordinaattivektoria, $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.)

- (4) Onko euklidinen pallo $\{y: |y - 2e_1| < 1\}$ avoin joukko edellisen tehtävän määrittelemässä metrisessä avaruudessa?
- (5) Todista, että jos Cauchyn jonolla on suppeneva osajono, niin koko jono suppenee.

- (1) * Tarkitetaan metristä avaruutta (A, d) missä d on diskreetti metriikka (ks. s. 5). Milloin tämä metrinen avaruus on kompakti?
- (2) Konstruoi metrinen avaruus, jossa on olemassa suljettu ja rajoitettu joukko joka ei ole kompakti. Vrt. Huomautus sivulla 19.
- (3) * Määrittele $\mathbb{R}$:ssä kaksi erilaista metriikkaa d_1 ja d_2 ja konstruoi funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ siten että $f: (\mathbb{R}, d_1) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ on jatkuva, mutta $f: (\mathbb{R}, d_2) \rightarrow (\mathbb{R}, d_1)$ ei ole.
- (4) Määrittele kuvaus $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ joka on kontraktio mutta jolla ei ole kiintopistettä.
- (5) Ensimmäisellä tunnilla tarkasteltiin differentiaali yhtälön $x'(t) = ax(t)$ ratkaisemista iteroimalla funktiota F joka määriteltiin seuraavasti

$$F(x)(t) = x(0) + \int_0^t ax(s) ds,$$

missä x on integroituva funktio. Lisäksi väitettiin, että $x_{n+1} = F(x_n)$ on konvergoiva jono funktioita, ja että raja-arvo $x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ on funktio jolle $x'(t) = ax(t)$. Todista tämä väite, esimerkiksi käyttämällä Banachin kiintopiste lausetta.

Tähdellä merkityt tehtävät tulee tehdä kirjallisesti ensi viikon harjoitustunnille mennessä.

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 1.2

- (1) * Todista, että jos $x_i \rightarrow x$ normiavaruudessa ja $\lambda_i \rightarrow \lambda$ reaaliakselilla, niin $\lambda_i x_i \rightarrow \lambda x$ ja $\|x_i\| \rightarrow \|x\|$.
- (2) Mikä on $\mathbb{R}^n$:n duaaliavaruus (s 29)? T.s. etsi tälle avaruudelle yksinertainen karakterisaatio.
- (3) * Esimerkki 1 sivulla 21 on määritelty 1- ja ∞ - normit Eukliidisessä avaruudessa. Osoita, että nämä ovat ekvivalentteja.
- (4) Olkoon $p > 1$ ja tarkastellaan reaalinumerojonoja $(x_i)_{i=0}^\infty$. Määritellään $\|(x_i)\|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ ja
$$\ell_p = \{(x_i)_{i=0}^\infty : x_i \in \mathbb{R}, \|(x_i)\|_p < \infty\}.$$
Olettaen, että ℓ_p on normiavaruus, todista, että se on täydellinen (ks. s. 23).
- (5) Vertaa täydellisyysoidistuksia sivuilla 23 ja 28. Mitä niille on yhteistä?

Tähdellä merkityt tehtävät tulee tehdä kirjallisesti ensi viikon harjoitustunnille mennessä.

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 8.2

- (1) * Tarkastellaan Banach avaruutta $\mathbb{R}^n$ normilla

$$\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

missä x_i on x :n i :s koordinaatti. Milloin tähän avaruuteen voidaan määritellä sisätulo? (Vihje: käytä sivun 37 karakterisaatiota.)

- (2) Olkoon $H = \mathbb{R}^2$ ja A 2×2 matriisi. Milloin $x^t A y$ on sisätulo avaruudessa H ? (Tässä x^t merkkää vektorin transpoosia.)
- (3) * Todista reaalitapauksen polaarikaava, eli Lause 2.1.3 kohta 3.
- (4) Olkoon H sisätuloavaruus sisätulolla $(\cdot|\cdot)$. Oletetaan, että $(x|z) = (z|y)$ kaikilla $z \in H$. Mikä yhteys pätee x :n ja y :n välillä?
- (5) Laske, mikä on

$$\min_{a,b \in \mathbb{R}} \int_{-1}^1 (x^2 - ax - b)^2 dx.$$

Käyttäen tätä apuna, selvitä mikä on

$$\int_{-1}^1 x^2 g(x) dx,$$

suurin mahdollinen arvo, kun funktiosta g tiedetään seuraavat kolme seikkaa:

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0, \int_{-1}^1 xg(x) dx = 0, \int_{-1}^1 |g(x)|^2 dx = 1.$$

Tähdellä merkityt tehtävät tulee tehdä kirjallisesti ensi viikon harjoitustunnille mennessä.

- (1) Tutkitaan avaruutta $L^2([-1, 1])$, ks. sivu 45. Etsi aliavaruudelle $L(\{1, x^2, x^4\})$ ortonormaali kanta.
- (2) * Tutkitaan edelleen avaruutta $L^2([-1, 1])$. Mikä on funktiolle 1 normin suhteen paras mahdollinen approksimaatio lineaarisessa aliavaruudessa $L(\{x, x^2\})$?
- (3) * Osoita, että jos S on totaali ja lineaarisesti vapaa, ja E on saatu S :stä Gram-Schmidtin menetelmällä, niin myös E on totaali (vrt. sivu 46).
- (4) Todista Lemma 2.2.1, eli, että Hilbert avaruuden kahden suljetun aliavaruuden suora summa on suljettu aliavaruus.
- (5) Tutkitaan "Hilbertin kuutiota"

$$E = \{x \in H : |(x|e_i)| \leq \delta_i\},$$

missä $(e_i)_{i=1}^\infty$ on Hilbert avaruuden H ortonormaali kanta ja $(\delta_i)_{i=1}^\infty$ on jono positiivisia lukuja. Todista, että E on kompakti jos ja vain jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 < \infty.$$

Tähdellä merkityt tehtävät tulee tehdä kirjallisesti ensi viikon harjoitustunnille mennessä.

- (1) * Tutkitaan avaruuden $L^2([-1, 1])$, ks. sivu 45, aliavaruutta $H = L(\{1, x, x^2\})$. Merkitään $p(x) = ax^2 + bx + c$ ja määritellään $F(p) = 2(a + b + c)$. Etsi $q \in H$ siten, että $F(p) = (p|q)$.
- (2) Tutkitaan avaruutta $\ell_2(\mathbb{R})$ ja operaattoria

$$A((x_k)_{k=1}^\infty) = \left(\sum_{i=1}^k x_i \right)_{k=1}^\infty.$$

Mikä on A :n adjugoitu operaattori?

- (3) * Todista sivun 56 väite $M^{\perp\perp} = \overline{M}$, missä M on mielivaltainen Hilbert avaruuden H osajoukko.
- (4) Tutkitaan seuraavaksi avaruuden $L^2([-1, 1])$ aliavaruutta $H = L(\{1, x\})$. Funktiot 1 ja x muodostavat H :n kannan.
- (A) Osoita, että avaruuden H^* kannaksi käy e_1 ja e_2 , jotka määritellään niin, että $e_1(ax + b) = a$ ja $e_2(ax + b) = b$.
- (B) Sivulla 51 kerrotaan, että on olemassa kuvaus $J: H \rightarrow H^*$ joka on lineaarinen isometria. Etsi kuvauksen J eksplisiittinen muoto, eli tässä tapauksessa sopiva 2 kertaa 2 matriisi.

- (1) * Tarkastellaan avaruutta $X = \mathbb{R}$. Olkoon A_i , $i = 1, 2, \dots$ avoimia, puoli-avoimia tai suljettuja reaaliakselin erillisiä välejä. Osoita, että $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ on Borel joukko.
- (2) Todista Lemma 3.2.1, eli että jonosta σ -algebran Γ osajoukoista A_i löytyy toinen jono σ -algebran Γ erillisiä osajoukoja B_i , siten, että $B_i \subset A_i$ ja

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

- (3) Kinnitetään joukko X ja sen σ -algebra Γ . Olkoon μ_1 ja μ_2 σ -algebralla Γ määriteltyjä mittoja. Todista, että myös $\mu_1 + \mu_2$ on mitta.
- (4) * Sivun 66 huomautuksessa todetaan, että ehto $\mu(A_k) < \infty$ on oleellinen Lauseen 3.2.1 kohdan (e) todistuksessa. Anna esimerkki tästä, eli joukot $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A_i \in \Gamma$ joille

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i).$$

- (5) Todista, että σ -algebra on joko äärellinen tai ylinumeroituva.

HUOM! Viikolla 11 ei ole laskuharjoitustunteja. Nämä tehtävät ovat viikolle 12.

- (1) * Cantorin joukko konstruoidaan seuraavasti: Lähdetään joukosta $E_0 = [0, 1]$. Joukko E_1 saadaan poistamalla joukosta E_0 keskimäinen kolmannes, eli $E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. E_1 koostuu siis kahdesta välistä, ja E_2 saadaan poistamalla kummankin välin keskimäinen kolmannes, eli

$$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Tätä prosessia jatketaan, ja Cantorin joukko on prosessin raja-arvo, eli $K = \bigcap_{i \geq 0} E_i$. Laske Cantorin joukon ulkomitta.

- (2) Tarkastellaan lukumäärämittaa, ks. sivu 72. Mitkä funktiot ovat tämän mitan suhteen mitallisia?
- (3) * Funktio f on paloittain jarkuva, eli sillä on korkeintaan äärellisen monta epäjatkuvuus kohtaa. Todista, että f on mitallinen
- (4) Todista Lemma 3.5.2, eli, että avoin joukko voidaan esittää numeroitvana yhdisteenä avoimia välejä.
- (5) Todista, että $f + g$ on mitallinen jos se on hyvin määritelty ja f ja g ovat mitallisia.

- (1) Todista, että Lebesguen mitta on ulkosäännöllinen, eli, että seuraava ominaisuus on voimassa: jos $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko, niin

$$m_n(E) = \inf_{E \subset \bigcup A} m_n(A),$$

missä siis infimum otetaan yli joukon E avointen ympäristöjen A .

- (2) * Olkoon $f(x) = |x|\chi_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)$. Laske $\int_{[0,1]} f$.
- (3) Todista Lause 3.8.2 (b), eli, että $\int_E f \leq \int_F f$, kun f on mitallinen funktio joukossa F , ja $E \subset F$ ovat mitallisia.
- (4) * Olkoon f yksinkertainen funktio, jolle $f = \sum_{i=1}^p c_i \chi_{A_i}$ (ei välttämättä normaaliesitys). Todista, että mitalliselle E pätee

$$I(f, E) = \sum_{i=1}^p c_i m_n(A_i \cap E).$$

- (1) * Kiinnitetään $0 \leq \alpha < \beta < \infty$. Konstruoi jono mitallisia funktioita f_k (vrt. sivu 93) siten, että

$$\int_{[0,1]} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \alpha < \beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_k.$$

- (2) Todista Lause 3.8.8 (a), eli, että integraali on additiivinen erillisten integroimisjoukkojen suhteen. Huomaa, että summa ja yhdiste eivät välttämättä ole numeroituvia.
- (3) * Todista Lause 3.8.8 (b), eli, että integroinnin ja raja-arvon ottamisen järjestys voidaan vaihtaa kasvavalle jonolle integroimisalueita.
- (4) Konstruoi jono jatkuvia reaaliarvoisia funktioita f_k välillä $[0, 1]$, siten, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k = 0,$$

mutta $f_k(x)$ ei suppene millään $x \in [0, 1]$.

- (5) Olkoon (f_k) jono välillä $[0, 1]$ jatkuvia reaaliarvoisia funktioita joille $f_k(x) \rightarrow 0$ jokaisella x . Todista, että

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_k = 0.$$

Yritä todistaa sama asia käyttämättä hyväksi Lebesgue integraalin ominaisuuksia, nojautuen vain Analyysi I-II tietoihin Riemann integraalista (huomaa, että f_k on jatkuvana funktiona Riemann integroitava).

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 19.4

- (1) * Todista Lemma 3.9.1, eli, että $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on mitallinen jos ja vain jos f^+ ja f^- ovat.
- (2) * Todista Lause 3.9.3 (c), eli, että integraali on monotooninen integroitavan funktion suhteen.
- (3) Todista Youngin epäyhtälö, eli, että

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'},$$

missä $a, b > 0$, $p \in (1, \infty)$ ja $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (Vihje: Etsi funktion $f(a) = \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'} - ab$ minimi kiinteällä b :n arvolla.)

- (4) Todista Hölderin epäyhtälö, eli, että

$$\int_E |fg| \leq \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_E |g|^{p'} \right)^{1/p'},$$

missä E on mitallinen joukko, $f \in L^p(E)$, $g \in L^{p'}(E)$, ja p, p' ovat kuten edellisessä tehtävässä. (Vihje: Oleta ensin, että $\|f\|_p = \|g\|_{p'} = 1$. Käytä Youngin epäyhtälöä.)

Analyysi III, kevät 2006

Harjoitustehtävät 26.4

- (1) * Todista Lause 3.9.3 (d), eli, että laajennetun reaaliarvoisen funktion integraali on additiivinen.
- (2) Todista Lause 3.9.6 (a) TAI (b).
- (3) * Todista, että tehtävän (5) väitteestä seuraa Dominoidun konvergenssin lause.
- (4) Anna esimerkki jatkuvasta funktiosta, joka ei ole absoluuttisesti jatkuva.
- (5) Todista, että samoin oletuksin kuin Dominoidun konvergenssin lauseessa (Lause 3.9.5) pätee myös seuraava, vahvempi tulos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E |f_k - f| = 0.$$