

## **Matematiikan didaktiikkaa tutkimuksen valossa – kohti kansainvälisyyttä**

Heidi Krzywacki<sup>1</sup>, Anu Laine<sup>1</sup>, Peter Hästö<sup>2</sup> & Markku S. Hannula<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto

<sup>2</sup>Matemaattisten tieteiden laitos, Oulun yliopisto

*Artikkelissa tarkastellaan suomalaisen matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimuksen kehittymistä viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana. Katsaus perustuu suomalaisten tutkijoiden matematiikan didaktiikan alalla tuottamiin julkaisuihin: kansallisia julkaistuja artikkeleita löytyi 214, matematiikan didaktiikan alan väitöskirjoja 34 ja kansainvälisiä vertaisarvioituja konferenssi- tai lehtiartikkeleita 84. Alan tutkimuksesta on muodostettu yleiskuva julkaisujen teeman, käytetyn tutkimusmenetelmän, kohteena olevan ikäryhmän, tulosten sekä keskeisimpien johtopäätösten perusteella. Matematiikan didaktiikan tutkimusta kuvataan tutkimusaiheisiin perustuvassa luokittelussa, jossa nostetaan esiin suomalaisen matematiikan opetuksen, opiskelun ja oppimisen kannalta mielekkäät tutkimusteemat. Suomalainen tutkimus ei luonnollisestikaan kata kaikki matematiikan opetuksen ja oppimisen osa-alueita; jotkin tutkimuksen osa-alueet painottuvat toisia enemmän, kuten affektit matematiikan opetuksessa ja opiskelussa, kun taas osa opetukselle keskeisistä teemoista, esimerkiksi luokkahuonetutkimus, jää vaille huomiota. Suomalaisessa koulutusympäristössä muun muassa opettajan vapaus toimia oman ammattitaitonsa ja pedagogisen ajattelunsa perusteella synnyttää omat erityispiirteensä. Myös tulevaisuudessa tarvitaan matematiikan didaktiikan tutkimusta, jossa nämä erityispiirteet huomioidaan.*

**Avainsanat:** matematiikan opetus, matematiikan oppiminen, ainedidaktinen tutkimus, kirjallisuuskatsaus

Tässä artikkelissa tarkastelemme matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimusta viimeisen 20 vuoden ajalta (vuosilta 1990-2009), kuvaamme kehitystä ja nostamme esiin keskeisiä tutkimuksen teemoja. Tavoitteena on luoda kokonaiskuvaa suomalaisesta tutkimuksesta kansallisesti ja kansainvälisesti sekä tarkastella suomalaista matematiikan opetusta ja oppimista tutkimuksen valossa. Artikkelin lopuksi suomalaista tutkimusperinnettä tarkastellaan myös kansainvälisen matematiikan opetuksen tutkimuksen kentässä.

### **Tutkimuskirjallisuuden kartoittaminen**

Katsauksemme pohjaksi olemme käyneet läpi keskeisimpiä matematiikan didaktiikan tutkimuksen kansallisia ja kansainvälisiä julkaisuja, joista on poimittu kaikki suomalaisten tutkijoiden kirjoittamat matematiikan opetuksen ja oppimisen alaan liittyvät julkaisut. Kansallisia, pääosin suomen kielellä vuosina 1990-2009 julkaistuja artikkeleita oli yhteensä 214, ja ne kerättiin Kasvatus-lehdestä (22), Ainedidaktisen symposiumin (66) ja Matematiikan ja luonnontieteiden tutkimuspäivien (92) konferenssijulkaisuista. Lisäksi analyysiin otettiin mukaan suomalaisissa yliopistoissa julkaistut väitöskirjat (34), jotka liittyivät matematiikan opetuksen ja oppimisen

ilmiöihin. Kansainväliset suomalaisten tutkijoiden kirjoittamat artikkelit haettiin vuosittain järjestettävään PME –konferenssin (Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education) vertaisarvioituista julkaisuista (34) ja alan tutkimusraportteja julkaisevista lehdistä. Kansainvälisistä lehdistä etsittiin Scopus-tietokannan avulla julkaisuja vain vuosilta 2000-2009 ja niitä löytyi yhteensä 50<sup>1</sup>. Perustelemme rajoittumista viimeiselle vuosikymmenelle kahdella tavalla; artikkelien etsiminen laajasta valikoimasta tieteellisiä julkaisuja oli haasteellinen tehtävä, sillä artikkelit seulottiin sekä tutkimusaiheen että kirjoittajan alkuperän perusteella, ja lisäksi suomalaista tutkimusta on julkaistu 1990-luvulla vähän kansainvälisesti. Artikkelien etsimisessä tavoitteena oli muodostaa yleiskuva alalla tehdystä tutkimuksesta, joka katsottiin saavutettavan tarkastelemalla viimeisen vuosikymmenen aikana keskeisissä tieteellisissä lehdissä julkaistuja artikkeleita.

Olemme muodostaneet yleiskuvan tutkimuksen kentästä julkaisujen teeman, tutkimuksessa käytetyn tutkimusmenetelmän, kohteena olevan ikäryhmän, esiteltyjen tulosten sekä keskeisimpien johtopäätösten perusteella. Analysoinnin aikana syntyi tutkimusaiheisiin perustuva luokittelu, jonka perusteella kuvaamme suomalaista matematiikan didaktiikan tutkimusta. Tämä teemoittainen tarkastelu osoittautui haasteelliseksi tehtäväksi. Halusimme nostaa esiin suomalaisen tutkimuksen kannalta keskeisiä teemoja, mutta esitellä tutkimuskenttää erityisesti matematiikan opetuksen, opiskelun ja oppimisen kannalta mielekkäällä tavalla huomioiden niin opettajan kuin oppilaan näkökulman. Suomalainen didaktinen tutkimus ei luonnollisestikaan kata kaikki matematiikan opetuksen ja oppimisen osa-alueita; jotkin tutkimuksen osa-alueet painottuvat toisia enemmän ja osa opetukselle keskeisistä teemoista jää vaille huomiota. Lisäksi useammissa julkaisuissa, erityisesti väitöskirjoissa käsiteltiin laajoja aiheita, minkä vuoksi luokittelu teeman mukaan ei myöskään ole ollut pois-sulkevaa. Näin ollen osa julkaisuista on sijoitettu luokittelussa kahden eri teeman alle.

### **Suomalainen matematiikan didaktiikan tutkimus**

Tarkastelemme matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimusta viiden luokittelun perustana olleen teeman avulla: (1) matematiikan opetus, (2) matematiikan oppiminen ja opiskelu, (3) affektit (uskomukset), (4) kehittyminen opettajana ja (5) koulutusjärjestelmä. Taulukossa 1 on esitetty julkaisujen jakautuminen teemoittain. Tutkimusaiheiden lisäksi taulukossa on huomioitu, onko julkaisu kansainvälinen vai kansallinen ja perustuuko julkaisu empiriaan. Lisäksi empiriaan perustuvat julkaisut on eroteltu metodologisen lähestymistavan perusteella: kvantitatiivinen, kvalitatiivinen ja monimenetelmällisyyteen perustuva tutkimus on ryhmiteltyinä taulukossa. Tarkemmat tiedot julkaisuista löydät verkkosivulta, jonka osoite löytyy Taulukon 1 alaviitteestä.

---

<sup>1</sup> Jatkossa julkaisuihin viitataan käyttämällä seuraavia lyhenteitä:

*K* = Kasvatus-lehti

*A* = Ainedidaktisen symposiumin konferenssijulkaisu

*T* = Matematiikan ja luonnontieteen opetuksen tutkimusseuran konferenssijulkaisu

*V* = väitöskirja

*KV* = artikkeli kansainvälisessä tieteellisessä lehdessä

*P* = PME-konferenssin vertaisarvioitu konferenssijulkaisu

**Taulukko 1.** Suomalainen vuosina 1990-2009 julkaistu matematiikan didaktiikan tutkimus<sup>2</sup>

<b>Teemat</b>		<b>Empiirinen</b>	<b>Ei empiriaa</b>
<b>Matematiikan opetus</b>  <i>65 julkaisua</i> <i>(21%)</i>		<b>Kansalliset</b> kval. 10, kvant. 1, monim. 1	<b>Kansalliset</b> 23
		<b>Kansainväliset</b> kval. 2	<b>Kansainväliset</b> 5
	opetus- opetus- kokeilut	<b>Kansalliset</b> kval. 6, kvant. 6, monim. 3	<b>Kansalliset</b> 6
		<b>Kansainväliset</b> kval. 1, kvant. 1	
<b>Matematiikan oppiminen ja opiskelu</b>  <i>104 julkaisua</i> <i>(33%)</i>	oppiminen	<b>Kansalliset</b> kval. 12, kvant. 24, monim. 8	<b>Kansalliset</b> 1
		<b>Kansainväliset</b> kval. 10, kvant. 10, monim. 2	<b>Kansainväliset</b> 2
	varhaisten mat. taitojen kehittyminen	<b>Kansalliset</b> kvant. 2	
		<b>Kansainväliset</b> kvant. 12	
	opiskelu	<b>Kansalliset</b> kval. 4, kvant. 1, monim. 1	
		<b>Kansainväliset</b> kval. 1, monim. 2	
<b>Affektit</b>  <i>96 julkaisua</i> <i>(31%)</i>	oppilas / oppija	<b>Kansalliset</b> kval. 10, kvant. 16, monim. 2	<b>Kansalliset</b> 6
		<b>Kansainväliset</b> kval. 9, kvant. 9	<b>Kansainväliset</b> 2
	opettaja	<b>Kansalliset</b> kval. 15, kvant. 7, monim. 4	<b>Kansalliset</b> 5
		<b>Kansainväliset</b> kval. 9, kvant. 5	<b>Kansainväliset</b> 1
<b>Opettajan ammatillinen kehittyminen</b>  <i>31 julkaisua</i> <i>(10%)</i>		<b>Kansalliset</b> kval. 17, kvant. 3, monim. 1	<b>Kansalliset</b> 3
		<b>Kansainväliset</b> kval. 7	
<b>Koulutusjärjestelmä</b>  <i>17 julkaisua</i> <i>(5%)</i>		<b>Kansalliset</b> kvant. 4, monim. 1	<b>Kansalliset</b> 10
		<b>Kansainväliset</b> kval. 1, kvant. 1	

<sup>2</sup> tarkempi taulukko ja yksityiskohtainen luettelo julkaisuista löytyvät verkkosivulta [http://blogs.helsinki.fi/math-sci/files/2011/12/Taulukko-1\\_aakkosellinen-julkaisuluettelo.pdf](http://blogs.helsinki.fi/math-sci/files/2011/12/Taulukko-1_aakkosellinen-julkaisuluettelo.pdf)

Tarkastelemme seuraavaksi kutakin teemaa tarkemmin ja nostamme esiin esimerkkejä artikkeleista. Julkaisuissa käytetään kirjavasti opetuksen, opiskelun ja oppimisen terminologiaa, mikä tekee kokonaisuuden kuvaamisesta haasteellisen tehtävän. Tässä artikkelissa käytämme käsitettä 'oppilas' tarkoittamaan yleisnimitystä matematiikan oppijasta niin perusopetuksessa kuin toisen asteen koulutuksessa. Tutkimukset, joissa käsitellään esimerkiksi opettajaopiskelijoiden ammattiin kasvua sekä tiedollista ja taidollista kehittymistä, olemme luokitelleet kuuluvaksi kategoriaan Opettajan ammatillinen kehittyminen.

### **MATEMATIIKAN OPETUS**

Matematiikan opetuksella ymmärrämme tässä kaikkea sitä toimintaa, mikä liittyy opetuksen suunnitteluun, toteuttamiseen ja arvioimiseen opettajan näkökulmasta. Emme ole erotelleet luokkahuonetoimintaan ja yleisemmin kouluuyhteisön toimintaan liittyviä aiheita, mutta tarkastelemme erikseen yleisesti opetukseen liittyvää kirjallisuutta ja varsinaisia opetuksen kehittämiseen tähtäviä opetuskokeiluja. Yhteensä 65 julkaisua eli 20 prosenttia tutkimuksesta liittyi matematiikan opetukseen, josta esittelemme muutamia kiinnostavia teemoja.

Kouluopetuksen muutokset ovat olleet keskeinen teema julkaistuissa artikkeleissa erityisesti 1990-luvun alkupuoliskolla, jolloin on kiinnitetty huomiota konstruktivistiseen oppimisenäkemykseen ja sen vaikutukseen kouluopetuksessa. Suurin osa ei-empirisistä julkaisuista on kantaa ottavia, osin tutkimuskirjallisuuteen, osin omakohtaiseen kokemukseen pohjautuvia pohdintoja siitä, millaista matematiikan opetuksen tulevaisuudessa tulisi olla [K12<sup>3</sup>]. Erityisesti on pohdittu oppijan aktiivista roolia opetustapahtumassa ja sitä, miten tätä uuden näkemyksen mukaista opetusta voisi toteuttaa käytännössä [K8, A8]. Yhtäläillä on kiinnitetty huomiota siihen, miten oppijan tiedon rakentumista voidaan matematiikan opetuksessa tukea. Matematiikan opetuksen yleisiä periaatteita ja lähtökohtia ei ole tarkasteltu erityisemmin enää 2000-luvulla.

Toinen keskeinen teema on hyvä matematiikan opetus, jota on tarkasteltu useasta eri näkökulmasta. Hyvälle opetukselle on pyritty määrittelemään kriteerejä, joiden avulla voidaan tarkastella opetuksen toteutumista. Yhtenä tärkeänä hyvän opetuksen mittarina voidaan pitää opettajan ja oppilaan välistä vuorovaikutussuhdetta, jossa merkityksellistä matematiikan opetuksen kannalta on nähty opettajan taito tunnistaa ja tukea oppilaan ajatteluprosesseja. Lisäksi on kiinnitetty huomiota siihen, miten oppilaita arvioidaan ja motivoidaan [A11, V26].

Matematiikkaan oppiaineena liittyy erityispiirteitä, jotka opetuksen toteutuksessa tulisi ottaa huomioon. Tällaisia ovat esimerkiksi eri oppisisältöihin liittyvät proseduraaliset ja konseptuaaliset näkökulmat: matematiikassa proseduraalinen tieto voi esimerkiksi olla yhteenlaskun suorittamisesta allekkain algoritmina vaiheittain, kun taas konseptuaalinen tieto liittyy esimerkiksi ymmärrykseen murtoluvuista ja niiden ominaisuuksista. Matematiikan ominaispiirteitä voidaan pitää kumuloiuvuutta: seuraavat sisällöt rakentuvat aikaisemmin käsitellyn perustalle. Hyvän esimerkin tästä muodostavat

---

<sup>3</sup> Kukin julkaisu on merkitty julkaisun koodilla ja juoksevilla numeroinnilla.

lukualueen laajentumiseen liittyvä tutkimus ja sen perusteella tehdyt johtopäätökset opetuksen kehittämiseksi [KV31, KV32]. Käsitteiden opettamista ja oppimista on tarkasteltu myös konkretisoinnin ja apuvälineiden käytön näkökulmasta.

Matematiikan opetuksessa käytettävät materiaaleja ja teknisiä sovelluksia on käsitelty myös julkaisuissa. Matematiikan oppikirjoja on tarkasteltu niiden sisältöjen ja oppiaineksen rakentumisen kannalta eri luokka-asteilla, esimerkiksi minkälaiseen opiskeluun ja oppimiseen käytetyt oppimateriaalit ohjaavat [A55]. Tieto- ja viestintäteknikka on kiinnostanut tutkijoita koko viimeisen kahdenkymmenen vuoden ajan. Matematiikan opetukseen, esimerkiksi geometriaan, on kehitetty erilaisia tietokoneavusteisia materiaaleja ja oppimisympäristöjä, joiden vaikutuksia opetukseen on tarkasteltu tutkimuksessa [KV24, KV 42, KV43].

### **Opetuskokeilut**

Matematiikan opetusta on tutkittu myös erityisesti opetuskokeilujen ja didaktisen kehittelyn valossa. Useimmissa tähän ryhmään kuuluvissa tutkimuksissa on tarkasteltu esimerkiksi oppimateriaalia tai opetuksellista innovaatiota, jonka käyttöä ja vaikutuksia on seurattu. Lähtökohtana on ajatus, että oppimisympäristö ja käytetty materiaali muuttavat tapaa opiskella ja oppia matematiikkaa. Tästä aiheesta on tehty viisi väitöskirjaa muiden kansallisen tason julkaisujen lisäksi (yhteensä 23 julkaisua).

Uusia näkökulmia perinteiseen matematiikan opetukseen on synnyttänyt teknologian soveltaminen opetuskäyttöön. Tietotekniikka tarjoaa uudenlaisia mahdollisuuksia yhteistoiminnalliseen matematiikan opiskeluun ja oppimiseen; matematiikan opintoja on järjestetty verkko-opiskelun muodossa ja on kehitetty integroituja oppimisympäristöjä, joiden vaikutuksia opiskeluprosessiin ja oppimiseen on tutkittu [V5]. Tietokonepelit herättivät 1990-luvulla mielenkiintoa niin oppimisen tehostamisen kuin oppilaan motivaation tukemisen näkökulmasta. Lisäksi tieto- ja viestintäteknikan avulla on mahdollista saada ajatteluprosessin vaiheita näkyviin yhteistoiminnallisessa opiskelussa ja tukea oppilaiden tietoisuutta omasta ajattelustaan sekä sen kehittymisestä [A46, V12]. Teknologisten sovellusten jatkuva kehittyminen, esimerkiksi interaktiivisten valkotaulujen opetuskäyttö, asettaa omat haasteensa tämänkaltaisille opetuskokeiluille tutkimusalueena. Kaiken kaikkiaan tieto- ja viestintäteknikan käyttäminen osana opetusta ja oppimista on kuitenkin jäänyt vähälle huomiolle suomalaisessa matematiikan opetuksen tutkimuksessa.

Toinen keskeinen teema opetuskokeiluissa on opetusmuotojen, didaktisten ratkaisujen ja oppimateriaalin kehittäminen. Tutkimuksen kohteena on ollut innovatiivisten oppimateriaalien käyttö, kun tavoitteena on ollut tukea erilaisia opiskelumuotoja kuten monimuoto-opiskelua ja itsenäistä matematiikan opiskelemista. Lähtökohtana on ollut, että oppimateriaalin on tuettava halutun kaltaista opetusta ja oppimista [P8, T32]. Toiminnallisuus, havainnollistaminen ja mahdollisuus käyttää materiaaleja oppimisen tukena ovat keskeinen lähtökohta matematiikan opetuksessa, mikä näkyy myös tutkimuksessa. Perinteisten oppimateriaalien rinnalle on kehitetty uusia ratkaisuja, joissa lähestymistapa tai sisältö on tarkoitettu synnyttämään myös tutkimuksellisesti mielenkiintoisen asetelman Tästä yhtenä esimerkkinä on ongelmanratkaisumateriaalien käyttö alaluokkien matematiikan opetuksessa [V32].

## **MATEMATIIKAN OPPIMINEN JA OPISKELU**

Matematiikan oppimiseen liittyviä empiriaan perustuvia tutkimuksia on raportoitu runsaasti niin kansallisesti kuin kansainvälisesti, noin kolmasosa kaikista julkaisuista. Matematiikan oppimistuloksia on tarkasteltu yleisellä tasolla esimerkiksi kansainvälisissä PISA -vertailuissa, mutta osa tutkimuksesta on kohdentunut johonkin erityiseen sisältöalueeseen niin konseptuaalisten kuin proseduraalisten tietojen ja taitojen kehittymisen kannalta. Olemme erotelleet kolme alaryhmää: (1) matematiikan oppiminen ja erityiset sisältöalueet, (2) matematiikan opiskelu sekä (3) varhaisten matemaattisten taitojen kehittyminen.

Viimeisen kahdenkymmenen vuoden aikana kansainväliset oppimistulosten vertailututkimukset ovat maallaneet yleiskuvaa suomalaisten lasten ja nuorten matemaattisesta osaamisesta. Näistä tunnetuin on PISA –tutkimus (*Programme for International Students Assessment*), jonka painopistealueena oli matematiikan osaamisen arvioiminen vuonna 2003. PISA -tutkimus on ollut suomalaisille yleisesti menestyskertomus, vaikkakin tutkijat ovat nostaneet esiin myös kehittämisen kohteita ja koulutusjärjestelmän heikkouksia. Vaikka matemaattinen osaaminen ja ongelmanratkaisutaidot ovat kärkiluokkaa, niin esimerkiksi kieliryhmien ja koululuokkien väliset erot ovat nähtävissä kerätyn aineiston valossa [K24, K25]. Sen lisäksi, että matemaattisen osaamisen tasoa on kuvattu tietyinä mittausajankohtana, on osaamisen kehittymistä tarkasteltu myös pitkittäistutkimuksissa useampien vuosien PISA-tulosten ja KASSEL-hankkeen puitteissa [T41]. Tämä on koulutuksen ja opetuksen kehittämisen kannalta erityisen merkityksellistä tietoa.

Matemaattista osaamista ja sen kehittymistä yleisesti on tutkimuksessa tarkasteltu peruskoulun yhteydessä. Vaikka suomalaisessa koulujärjestelmässä ei käytetä varsinaisia valtakunnallisia toimintaa ohjaavia ikätasokokeita, on mielenkiinnon kohteena olleet matemaattiset taidot 6. luokan lopussa ennen yläluokille siirtymistä sekä päättöarvioinnin yhteydessä 9. luokalla [V23]. Osaamisen testaaminen on antanut tietoa yleisestä osaamisen tasosta sekä matemaattisten valmiuksien kehittymisestä peruskoulun aikana. Osa tutkimuksesta on aitoa seurantatutkimusta, jossa oppilaiden kehittymistä on seurattu usean vuoden ajan [V24]. Yleisessä osaamisen tarkastelussa on mielenkiintoista ollut suoritusprofiili liittyen matemaattisiin tietoihin ja taitoihin [T28]. Osassa tutkimuksesta on tarkasteltu oppilaan (oppijan) varmuuden tunnetta ja itseluottamusta matematiikan osajana osaamisen arvioinnin rinnalla. Affekteihin liittyvää tutkimusta käsitellään tarkemmin myöhemmin.

### **Eri sisältöalueet matematiikan opetuksessa**

Yleisesti ottaen matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimus on painottunut matematiikan eri sisältöalueiden, esimerkiksi algebran ja rationaalilukujen opetuksen ja oppimisen näkökulma. Tarkastelun kohteena on ollut usein joko oppimisprosessi ja oppimistulokset tai se, miten tiettyä aihekokonaisuutta voitaisiin käsitellä mielekkäästi opetuksessa. Vaikka tutkimuksen kannalta oppiminen ja opetus on erotettu toisistaan, tarkastelemme tässä erityisiä sisältöalueita rinnan riippumatta tutkimuksellisesta näkökulmasta.

Geometriaa on tutkittu sekä opetuksen että oppilaan kehittämissä näkökulmista. Geometrian opetuksessa on pitkät perinteet, mutta esimerkiksi uuden teknologian soveltaminen osaksi opetusta on synnyttänyt uudenlaisia mahdollisuuksia ja haastanut muutokseen [A45]. Toisaalta tutkijoita on kiinnostanut yksittäisten geometrinen käsitteiden opettaminen ja ymmärtäminen: piiri ja pinta-ala sekä kulman käsite ovat olleet tutkimuksen aihealueina. Toisaalta geometrisen ajattelun ja spatiaalisen hahmotuskyvyn kehittäminen on nähty mielenkiintoisina yleisemmän tason tutkimusaiheina [A61, T72, V8]. Geometria näyttäytyy matematiikan opetuksen osa-alueena, jossa havainnollistavalla ja toiminnallisella opetuksella voidaan tukea oppilaan oppimista [V16, V31].

Peruskoulussa yksi matematiikan opetuksen haaste on tukea käsitteellistä muutosta lukukäsitteen kehittämisen taustalla. Kouluopetuksessa tämä nousee esiin erityisesti laajennettaessa lukualuetta luonnollisista luvuista rationaalilukuihin. Lukukäsitteen kehittämistä on tutkimuksessa tarkasteltu eri ikävaiheissa, niin esikouluikäisten luonnollisten lukujen ymmärtämystä kuin yläkoulun oppilaiden rationaalilukujen lukukäsitteen kehittämistä. Lukukäsite ja sen kehittyminen on erityisen kiinnostavaa eri lukujoukkoihin liittyen: tutkimuksessa on kiinnitetty huomiota rationaalilukujen, erityisesti murtolukujen ymmärtämiseen ja niihin virhetulkintoihin, joiden taustalla on luonnollisiin lukuihin liittyvä ajattelumalli [P16]. Myös jakolaskuihin liittyvät ratkaisustrategiat ja erilaiset virhetulkinnat nousevat tutkimuksessa omaksi teemakseen [T89, K17]. Tutkimuksen kannalta kiinnostavia aihealueita ovat olleet myös reaalitylukujen ymmärtäminen ja äärettömyys, jotka tuovat yhden näkökulman matemaattiseen ajatteluun ja sen kehittämiseen [V14].

Ongelmanratkaisutaidot ja matemaattinen päättely muodostavat oman teemansa osana matematiikan didaktiikan tutkimusta. Tutkijat ovat tarkastelleet oppilaiden ongelmanratkaisutaitoja ja näiden taitojen yhteyttä koulumenestykseen. Lisäksi oppilaiden taidot perustella matemaattista päättelyä ja todistaminen matemaattisena taitona ovat kiinnostaneet tutkijoita [K25, A22]. Ongelmanratkaisutaitoja ei ole tutkittu vain oppilaan näkökulmasta vaan tutkimuksen avulla on kehitetty ongelmanratkaisun tueksi opetuksellisia ratkaisuja [A50, V12].

Yllä kuvattujen aihealueiden lisäksi myös aritmetiikkaa ja algebraa on tarkasteltu niin opetuksen kehittämisen kuin oppimisen näkökulmista. Tutkimuksessa on nostettu esiin siirtymä kouluopetuksessa aritmetiikasta algebraan ja matemaattinen päättely osana algebraa [V24, V29]. Tämän lisäksi muun muassa derivaatan ja funktion käsitteen ymmärtäminen ja niiden oppimisen tukena käytetyt representaatiot ovat olleet tutkimusaiheina [V5, V30].

### **Varhaisten matemaattisten taitojen kehittyminen**

Suomalaisessa matematiikan oppimisen tutkimuksessa varhaisten matemaattisten taitojen kehittyminen on ollut yksi erityinen osa-alueensa. Teemaan liittyvä tutkimus on tehty pääosin psykologian alalla ja sitä on käyttämässämme aineistossa raportoitu yksinomaan kansainvälisissä julkaisuissa (yhteensä 12 artikkelia). Tutkimukset edustavat kvantitatiivista lähestymistapaa ja ne käsittelevät erityisesti esi- ja alkuopetuksen keskeisiä teemoja, kuten lukukäsitteen ymmärtämisen kehittämistä.

Tutkimusta leimaa erityispedagoginen lähestymistapa, jossa yhtenä tavoitteena on matemaattisten oppimisvaikeuksien ennalta ehkäiseminen ja opetuksen kehittäminen niin, että se tukisi jo aikaisessa vaiheessa erilaisia oppijoita [KV29]. Julkaisuissa käsitellään matemaattisen osaamisen yhteyttä esimerkiksi luetun ymmärtämiseen, äiti-lapsisuhteeseen ja lapsen käyttäytymismalleihin ongelmatilanteessa [KV35, KV48]. Osa tutkimuksesta käsittelee varhaista matemaattista kehitystä ja spontaania huomion kiinnittämistä lukumääriin toimintaympäristössä.

### **Opiskelu**

Olemme erottaneet opiskelun omaksi teemakseen, jolloin keskeisenä kiinnostuksen kohteena on oppilaan ja opiskelijan toiminta. Matematiikan opiskelulla ymmärrämme oppijan toimintaa, joka mahdollisesti johtaa oppimiseen. Tähän teemaan liittyviä tutkimuksia on raportoitu varsin vähän. Opettajan on hyvä olla tietoinen matematiikan opiskeluun liittyvistä prosesseista ja vaiheista, jotta hänellä olisi valmiuksia tukea oppilasta esimerkiksi ongelmanratkaisuprosessissa. Tämä on mahdollista, jos ajattelu tehdään näkyväksi ja oppilaita tuetaan matematiikan kielentämisessä. On esimerkiksi käytetty välineitä, joiden avulla ratkaisuprosessin vaiheet ja opiskelijoiden välinen vuorovaikutus ovat tulleet näkyviksi matemaattisen ongelmanratkaisun aikana pienryhmissä. Yhteistoiminnallinen oppiminen näyttäisi tutkimusten valossa keskeiseltä prosessin näkyväksi tekemisen kannalta, kun vertaisryhmässä yhdessä ratkaistaan matemaattista ongelmaa [KV18, KV25, KV49].

### **AFFEKTIT**

Suomalaisessa matematiikan opetuksen tutkimuksesta merkittävä osa, noin kolmasosa, on keskittynyt affekteihin osana matematiikan opetusta ja opiskelua. Tämän teeman alle on keskittynyt huomattava määrä niin kansallisesti kuin kansainvälisesti raportoitua tutkimusta. Aihealue on laaja ja kuvaamme tässä tutkimuskenttää matematiikkakuvan eri osa-alueiden kautta. Matematiikkakuva muodostuu niistä uskomuksista, asenteista, käsityksistä ja tiedosta, joita liitetään matematiikkaan ja sen oppimiseen ja opettamiseen. Mielenkiintoista yksittäisten uskomusten ja käsitysten sijaan on uskomusten muodostama rakenne. Olemme päätyneet kuvaamaan tutkimusaluetta sen kautta, miten matematiikkakuva syntyy ja muotoutuu, miten sitä tutkimuksen valossa kuvataan ja lopuksi sen suhteen, miten matematiikkakuvaan voidaan vaikuttaa ja minkälaisia mahdollisia vaikutuksia matematiikkakuvalla on opetukseen ja oppimiseen. Tutkimuksessa on tarkasteltu matematiikkakuvaa ja affektiivisiä aspekteja eri toimijoiden, muun muassa matematiikan opettajien, matematiikan professorien, opettajaopiskelijoiden ja oppilaiden näkökulmasta. Tässä kuvaamme aiheeseen liittyvää tutkimusta teemoittain riippumatta tutkimuksen kohteena olevista henkilöistä.

### **Miten matematiikkakuva syntyy ja muotoutuu?**

Tutkimuksessa on kiinnitetty huomiota kognitiivisten tietojen ja taitojen lisäksi siihen, mitä matematiikka merkitsee yksilölle, mitä ajatuksia, asenteita ja tunteita se herättää. Keskeinen tutkijoita kiinnostanut teema on ollut selvittää, miten matematiikkakuva muotoutuu ja mitkä tekijät mahdollisesti vaikuttavat muotoutumiseen. Elämäkerrallinen tutkimus ja narratiivinen tutkimusote ovat olleet yksi tapa tarkastella matematiikkakuvan taustaa. Kouluaikaiset muistikuvat omasta matematiikan opiskelusta ja oppimisesta koulussa sekä muistot lapsuudesta ovat olleet mielenkiinnon

kohteena [P25] – huonot kokemukset näyttäytyvät negatiivisena asenteena myöhemmin opinnoissa, esimerkiksi opettajaopintojen aikana [A37, A42, A43]. Juuri kokemukset ovat keskeinen tekijä matematiikkakuvan muotoutumisessa [V10, P11].

### **Matematiikkakuva: mitä se on?**

Affekteihin ja matematiikkakuvaan liittyvän tutkimuksen yhtenä haasteena on ollut käsitteellinen epäselvyys, sillä tutkimuksessa on käytetty kirjavasti erilaisia käsitteitä eikä tutkimusalalle ole muotoutunut yhteistä käsitekieltä. Matematiikkakuvaa ja uskomuksiin ja asenteisiin liittyviä käsitteitä onkin pyritty selventämään teoreettisissa tutkimuksissa; on syvennytty affekteihin osana matematiikan oppimista ja opiskelua ja pohdittu rakennetta, jonka kautta affekteja voitaisiin tarkastella [V13, V22, KV30]. Matematiikkakuvaa voidaan tarkastella neljän osa-alueen kautta: (1) kuva matematiikasta, (2) matemaattinen minäkuva, (3) kuva matematiikan opettamisesta ja (4) kuva matematiikan oppimisesta (Pehkonen, 1995)

Suomalaisessa tutkimuksessa *matemaattinen minäkuva* on yhtenä tutkimusteemana. Tutkimuksessa on kiinnitetty huomiota sukupuoleen ja sen merkitykseen liittyen käsityksiin itsestä oppijana. Erityisesti tyttöjen ja poikien matematiikan oppijana kokema itseluottamus ja sen kehittyminen sekä itseluottamukseen liittyvät sukupuolierot ovat olleet tarkastelun alla [V21]. Itseluottamuksen ja suoritukseen liittyvän varmuuden arviointi ovat olleet kiinnostavia teemoja matemaattisen osaamisen rinnalla; itseluottamusta on verrattu matemaattiseen suoritukseen yleisesti. Lisäksi tutkimuksissa on tarkasteltu matemaattista suoriutumista ja varmuutta suoritustilanteessa oppijan itsensä arvioimana [A35, V18]. Samaan teemaan voidaan katsoa kuuluvan myös oppijan itsesäätelyn valmiudet ja itseohjautuvuus matematiikan oppijana sekä motivaatio matematiikan oppimiseen.

Laaja kirjo alan tutkimusta on keskittynyt *kuvaan matematiikan opettamisesta*. Uskomuksia yleisesti hyvästä opettajasta ja tehokkaasta matematiikan opetuksesta on tutkittu, mutta useimmin on keskitytty tarkastelemaan niitä käsityksiä (uskomuksia) opetukseen ja oppimistuloksiin vaikuttavista tekijöistä, joita opettajilla on. Opetuksen kannalta mielenkiintoisia ovat olleet myös käsitykset ja asenteet erilaisia opetuksellisia elementtejä kohtaan, esimerkiksi teknologian käyttöä [T45], oppikirjoja ja oppimateriaaleja [T42] sekä sisältöjä kuten geometriaa kohtaan [V31]. Opetukseen liittyviä uskomuksia on kartoitettu eri ryhmiltä: opettajilta, oppilailta ja opettajaopiskelijoilta. Eri kohderyhmien uskomuksia on vertailtu myös erilaisissa tutkimusasetelmissa; opettajien uskomuksia on vertailtu oppilaiden uskomuksiin ja matemaattisia uskomuksia on tarkasteltu myös kansainvälisessä vertailussa [A19, KV38]. Kuvaa itsestä matematiikan opettajana käsitellään myös opettajan ammatilliseen kehittymiseen liittyvässä tutkimuksessa.

Tarkastelemassamme affekteihin liittyvässä tutkimuksessa ei varsinaisesti nosteta esiin teemaa liittyen kuvaan matematiikan *opiskelusta ja oppimisesta*. Yksi aihealue on ollut sukupuolitettu matematiikka ja tasa-arvonäkökulmat opetuksessa; opettajilla näyttäisi edelleen olevan hyvin perinteisiä käsityksiä poikien paremmista valmiuksista matematiikan oppijoina [V21]. Sen sijaan suomalaisessa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa on tarkasteltu *kuvaa matematiikasta*, erityisesti opettajien käsityksiä

matematiikasta. Tutkimuksessa on valotettu muun muassa matematiikan opettajien käsityksiä yhtälöistä [V27] ja matematiikan professorien käsityksiä matematiikasta [K10].

### **Matematiikkakuva vaikuttaa ja muuttuu**

Kolmas osa-alue, jota affekteihin liittyvässä tutkimuksessa on tarkasteltu, on matematiikkakuvan muuttuminen ja vaikutus oppimiseen. Kiinnostavaa on ollut selvittää mekanismeja, miten matematiikkakuva muuttuu ja miten tähän voisi mahdollisesti vaikuttaa [V13]. Koulutuksella näyttäisi olevan mahdollista vaikuttaa ensisijaisesti kuvaan matematiikan opetuksesta kun kuva itsestä matematiikan oppijana on pysyvämpi [A49]. Kehitysprosessia on tarkasteltu esimerkiksi opettajaopintojen aikana ja osana täydennyskoulutusta. Tämän tarkastelun yksi keskeinen idea on ollut, että uskomuksiin ja niiden muotoutumiseen voi vaikuttaa vain tiedostamalla omia uskomuksiaan – vain tällöin yksilö voi mahdollisesti huomioida ne opintojensa aikana ja opettajana toimiessaan. Uskomukset ilmenevät hyvin esimerkiksi osana opetusharjoittelua.

### **OPETTAJAN AMMATILLINEN KEHITTYMINEN**

Matematiikan opetuksen tutkimuksessa opettajuus ja opettajan ammatillinen kehittyminen ovat teemoja, jotka ovat merkityksellisiä niin koulutyön kuin opettajankoulutuksen kehittämisen näkökulmasta. Opettajalla on luonnollisesti keskeinen rooli opetuksen toteuttamisessa, ja tämä näkyy myös tutkimuksen kentässä. Tähän ryhmään kuului noin 10 prosenttia kaikista julkaisuista.

Matematiikan opettajaksi kehittyminen ja ammatillinen kasvu, esimerkiksi opettajan ammatillisen identiteetin muotoutuminen, ovat kiinnostava aihe niin yksilöllisen kehittymisen kuin opettajankoulutuksen kannalta [A33, V35]. Tutkimuksessa on tarkasteltu matematiikan opettajaksi opiskelevien valmiuksia tulevaan ammattiin. Aikaisempien kokemusten, esimerkiksi kouluaikaisten muistikuvien ja omien oppimiskokemusten merkitystä on käsitelty yhtenä lähtökohtana tulevana opettajana. Tulevan ammatin kannalta on tärkeää, että opettajaopiskelijat tiedostavat omia lähtökohtiaan ja käsityksiään opettajan ammatista ja matematiikan opettamisesta [V11, V20]. Tutkijat ovat olleet kiinnostuneita mahdollisuudesta vaikuttaa ennakoasenteisiin ja käsityksiin, ja niiden kautta opettajana kehittymiseen.

Suomalaisessa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa on tarkasteltu myös jonkin verran opettajan tiedollisia ja taidollisia valmiuksia sekä näiden valmiuksien kehittymistä. Opettajan tiedon osa-alueista matematiikan opettamiseen ja oppimiseen liittyvät tiedot, 'pedagoginen sisältötieto' (*pedagogical content knowledge*), erityisesti opettajaopiskelijoiden matemaattiset tiedot ja taidot sekä pedagogiset valmiudet huomioida opetuksessa esimerkiksi oppimisvaikeuksia ovat olleet tutkimuksellisesti kiinnostavia aiheita [K17, KV20]. Opettajan tiedon osa-alueiden lisäksi tutkimuksessa on kiinnitetty huomiota muihin valmiuksiin, kuten opettajaopiskelijoiden tieto- ja viestintätekniiikan käytön valmiuksiin sekä opettajan taitoon kuunnella oppilaitaan luokkahuonetilanteissa [K19].

Matematiikan opettajankoulutukseen liittyvässä tutkimuksessa on kiinnitetty huomiota kokemuksen merkitykseen ammatillisten lähtökohtien muovaajana. Koulutuksen aikana merkityksellisenä nähdään elämyksellisyys ja orientoituminen esimerkiksi vertaistuen avulla opettajan ammattiin. Tutkimuksen perusteella todetaan, että teoreettisten näkökulmien tulisi linkittyä käytännön kanssa opettajankoulutuksen eri vaiheissa.

### **KOULUTUSJÄRJESTELMÄT**

Omaksi luokakseen olemme keränneet julkaisut, joissa käsitellään matematiikan opetusta ja sen mahdollista kehittämistä koulutusjärjestelmän tasolla (yhteensä 17 julkaisua). Tästä teemasta on kirjoitettu selkeästi enemmän ei-empiirisiä julkaisuja, joissa teemaa on käsitelty kirjallisuuteen pohjautuen ja joiden tavoitteena on ollut ainakin välillisesti linjata tulevaa kehityssuuntaa. Erityisesti 1990-luvun alkupuolella pohdittiin opetuksen paradigmaattisia lähtökohtia ja kehityksen suuntaa, joka oli nähtävissä. Kansainvälisesti konstruktivistinen oppimisenäkemyksen ja sen merkitys matematiikan opetukselle herätti pohdintaa – niin myös Suomessa. Matematiikan opetuksen sen hetkisen tilan arvioimisen lisäksi pohdittiin sitä, minkälaista kehitystä toivottiin tapahtuvan tulevaisuudessa [A6, A13, A53].

Yksi lähtökohta suomalaisen koulutusjärjestelmän ja matematiikan opetuksen kehittämiseen ovat olleet kansalliset oppimisen arvioinnit. Aiheesta on tehty kolme väitöskirjaa, joissa keskeisenä tavoitteena on ollut tarkastella koulutusjärjestelmää arvioivasti. Kansainväliset vertailututkimukset (esimerkiksi PISA) ovat olleet yhtenä lähtökohtana pohtia matematiikan opetuksen tilaa Suomessa – artikkeleissa on kuvattu oppimistuloksia ja niiden antamaa kuvaa sekä otettu kantaa siihen, minkälaisia johtopäätöksiä tulosten perusteella voidaan tehdä [A59, KV50].

### **Yhteenvetoa ja tarkastelu kansainvälisessä viitekehityksessä**

Matematiikan opetus ja oppiminen on ollut suomalaisten kouluttajien ja tutkijoiden mielenkiinnon kohteena kasvavassa määrin; tutkimusala on monipuolistunut ja kansainvälistynyt ja samalla alan tutkimus on muuttunut systemaattisemmaksi eri aihealueiden tarkasteluksi (kts. Malinen & Kupari, 2003). Suomalaisessa kasvatuksen alan tutkimuskentässä matematiikan didaktiikka on suhteellisen uusi aihealue, mitä kuvaa varsin hyvin valmistuneiden matematiikan didaktiikan alan väitöskirjojen lukumäärät: 1980-luvulla valmistui neljä ja 1990-luvulla viisi kappaletta, mutta 2000-luvulla niitä valmistui jo monikertaisesti enemmän, noin 30 kappaletta. Väitöskirjat ovat kuitenkin vain yksi indikaattori kehityksen suunnasta ja tutkimusaiheista. Suomalaisessa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa keskeisimpiä teemoja ovat olleet uskomukset sekä kognitiiviset ilmiöt matematiikan oppimiseen ja opiskeluun liittyen. Sen sijaan suomalaisissa julkaisuissa ei raportoida lähes laisinkaan luokkahuonetutkimusta, esimerkiksi tutkimusta matematiikan opettajan toiminnasta eri tilanteissa. Suomalainen tutkimus näyttäisi perustuvan sekä kvantitatiiviseen että kvalitatiiviseen tutkimusotteeseen. Vain harvassa julkaisussa raportoitii monimenetelmällistä tutkimusta (*mixed methods research*). Yksittäisten julkaisujen perusteella ei voida kuitenkaan tehdä suoraan johtopäätöksiä käytetyistä tutkimusmenetelmistä, sillä laajempia projektikonaisuuksia on raportoitu pienempinä osina erillisissä julkaisuissa, ja tällöin on rajoitettu vain johonkin näkökulmaan rajatun aineiston pohjalta.

Katsauksessa on esitelty kahden vuosikymmenen aikana tehtyä suomalaista matematiikan opetuksen ja oppimisen tutkimusta viiden teeman avulla. Seuraavaksi tarkastelemme muodostettua kokonaiskuvaa kansainvälisessä viitekehyksessä, joka on muodostettu pääosin *International Group for Psychology of Mathematics Education* (PME) –järjestön vuosien 1997-2007 konferenssijulkaisujen sekä vuonna 2006 julkaistun järjestön tutkimuksen historiaa peilaavan julkaisun perusteella (Gutiérrez & Boero, 2006; katso myös Hannula, tulossa). PME on merkittävin vuosittain järjestettävistä matematiikan didaktiikan konferensseista, joka nimensä mukaisesti on ensisijaisesti edustanut psykologista näkökulmaa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa. Virallisesti konferenssi toivotti sosiologisiin teorioihin nojautuvat tutkijat tervetulleiksi mukaan vasta muutettuaan sääntöjään vuonna 2005. Tämän vuoksi tässä esitettyihin arvioihin tutkimusten teoreettisten viitekehysten ja tutkimusaiheiden kansainvälisistä trendeistä on siis suhtauduttava tietyllä varauksella. Seuraavassa esitellään lyhyesti keskeiset johtopäätökset kansainvälisestä tutkimuksesta ja pohditaan, miten suomalainen matematiikan didaktiikan tutkimus heijastelee esitettyjä kansainvälisiä trendejä.

Kansainvälinen matematiikan didaktiikan tutkimus on laajentunut ja monipuolistunut viime vuosina. PME-järjestön tutkimukset heijastelevat kolmea vaihetta, joissa on painotettu eri taustateorioita. Järjestö perustettiin vuonna 1976 ja alkuvaiheessa sen puitteissa tehty tutkimus pohjautui kognitiiviseen psykologiaan. Vuodet 1985-1995 olivat konstruktivismin nousun aikaa ja sen voidaan katsoa olleen vallitseva paradigma. Koska konstruktivismi on varsin yleinen teoria, kehitettiin sen pohjalta yksityiskohtaisempia teorioita, kuten APOS (Dubinsky & McDonald, 2001) ja Brousseau'n (1997) teoria didaktisista tilanteista (*La théorie des situations didactiques*). Konstruktivismin mukana on matematiikan didaktiikan tutkimuksessa tapahtunut käänne sosiaalisten teorioiden suuntaan ja ne ovat vakiinnuttaneet noin 10 % osuuden konferenssijulkaisun tutkimusraporteista (Lerman, 2006). On hyvä huomata, etteivät uudet teoreettiset viitekehykset ole syrjäyttäneet vaan pikemminkin rikastuttaneet ja monipuolistaneet lähtökohtien kirjoja vanhojen viitekehysten edelleen säilyttäessä asemansa.

Suomalainen matematiikan didaktiikan tutkimus on laajentunut voimakkaasti konstruktivismin valtakaudella, jonka vahva vaikutus on selvästi nähtävissä. Kognitiivinen psykologia on muutamaa poikkeusta lukuun ottamatta ollut Suomessa lähinnä kasvatuspsykologien käyttämä viitekehys. Suomalaisessa tutkimuksessa on nähtävissä joitakin sosiaalisten teorioiden varaan rakentuvia artikkeleita (esim. Kaasila & Lauriala, 2008 [A64]; Kaasila, 2007 [KV19]), vaikkakin niiden osuus jää vähäiseksi. Vaikka kognitiotiede ja kehollisuus (*embodied cognition*, katso esim. Núñez, Edwards & Matos, 1999) eivät olekaan erityisen yleisesti käytettyjä tutkimuksen viitekehysiksi PME-konferenssin julkaisuissa, ne mahdollisesti ennustavat tulevaa kehitystä. Kognitiotiede ja kehollisuus ovat suhteellisen tuoreita näkökulmia, joissa huomioidaan aivotutkimuksen viime vuosikymmenten tulokset. Lisäksi aihealueeseen liittyä toisinaan läheinen yhteistyö neurofysiologisen tutkimuksen kanssa, myös joissakin suomalaisissa matematiikan didaktiikan tutkimuksissa (esim. Railo, Koivisto, Revonsuo & Hannula, 2008 [KV 44]).

Kansainvälisestä tutkimuksesta tunnistettiin 18 aihealuetta, joiden perusteella on analysoitu muutoksia käsiteltyjen aiheiden painotuksissa vuosina 1997-2007 (Hannula 2009, tulossa). Oppimisteorioiden ja epistemologian aihepiiriä käsittelevien artikkelien osuus laski kahdeksasta prosentista kahteen prosenttiin, mikä johtunee konstruktivismia ja sen tulkintoja koskevan kiivaanakin käydyn debatin rauhoittumisesta. Myös kielen ja matematiikan yhteyksiä koskeva tutkimus on vähentynyt (yli kuudesta prosentista alle kolmeen prosenttiin). Toisaalta sosiokulttuurinen ja matemaattisen varhaiskehityksen tutkimus on ollut kasvussa, molempien osuus on kasvanut noin kahdella prosenttiyksiköllä. Kumpaaikin aihepiiriä käsittelevän tutkimuksen osuus PME:n julkaisuista on noin kuusi-seitsemän prosenttia. Opetusta, opettajia ja opettajankoulutusta käsittelevä tutkimus oli yleistynyt, sen osuus on noussut noin 15 prosenttiin kaikista tutkimuksista. Tämän aihepiirin tutkimuksen merkityksen kasvusta kertoo myös *Journal of Mathematics Teacher Education* –lehden perustaminen vuonna 1998 ja sen korkea tieteellinen taso. Tietotekniikan käyttö matematiikassa on valtavirtaistunut (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006). Kun aikaisemmin tietotekniikka oli poikkeuksellinen elementti ja yleensä tutkimuksen kohde, nähdään se nykyään useammin osana oppimisympäristöä, jolloin varsinaisena kiinnostuksen kohteena voi olla muun muassa jokin matematiikan sisältöalue tai tietty opetuksellinen lähestymistapa. (Hannula, 2009)

Algebra, matematiikkaan liittyvät affektiiviset tekijät sekä korkeamman matematiikan oppiminen ovat olleet tasaisesti suosiossa, kukin kattaen noin 8-12 prosentin osuuden vuotuisista raporteista. Geometria ja visualisointi sekä matemaattinen ongelmanratkaisu ja mallintaminen ovat olleet lievässä laskussa, molempien kokonaisuuden pysyessä yli viiden prosentin. Rationaalilukuja on käsitelty vajaa viisi prosenttia tutkimusraporteista. Lasten lukujonotaitojen ja varhaisen aritmetiikan kehittyminen oli keskeinen aihealue PME:n alkuvuosina, mutta se jäi pitkähköksi aikaa vähemmälle huomiolle. Viimeisen vuosikymmenen aikana matematiikan varhainen oppiminen on alkanut kiinnostaa uudelleen, nyt laajemmin eri sisältöalueita kattaen (Mulligan & Vergnaud, 2006). Vastaavanlainen kehityskaari on tapahtunut myös todistamisen tutkimisessa, jossa todistamisen ja päättelyn asteittainen kehittyminen olennaisena osana jokaisen oppijan matemaattisen ajattelun kehittymistä (*proof for all*) on korvannut matemaattiseen formalismiin pohjautuvan ja eksaktia todistamista korostaneen näkökulman (Mariotti, 2006).

Suomalaisessa tutkimuksessa on huomattavissa joitakin painotuseroja kansainvälisiin trendeihin verrattuna, vaikkakin kokonaisuutena suomalainen tutkimus näyttäisi seurailevan samoja linjoja. Kaikki kansainväliset aihepiirit ovat edustettuina myös suomalaisessa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa. Suomalaisen tutkimuksen erityispiirteenä voidaan pitää vahvaa affektiivisten tekijöiden, erityisesti matematiikkakuvan liittyvää tutkimusta. Myös tutkimusmenetelmällisesti suomalainen tutkimus näyttäisi noudattavan jollakin tavalla kansainvälistä linjaa. Laadulliset menetelmät ovat suosittuja, mutta myös kvantitatiivisia ja teoreettisia tutkimuksia tehdään ja julkaistaan (Hannula 2009, tulossa). Kaiken kaikkiaan muutos suomalaisessa matematiikan didaktiikan tutkimuksessa on kuin positiivinen kehityskertomus: se on

monipuolistunut, kansainvälistynyt ja lisääntynyt. Se tarjoaa hyvän lähtökohdan laadukkaalle koulutukselle kaikilla tasoilla.

## Lähteet

- Brousseau, G. (1997) *Theory of Didactical Situations in Mathematics: didasctiqu des mathématiques, 1970-1990*, N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, V. Warfield (Trans.), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001) APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, pp. 275—282. The Netherlands: Kluwer.
- Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006) The role and uses of Technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 237 – 274. Rotterdam: Sense.
- Gutiérrez, A. & Boero, P. (2006). Eds. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense.
- Hannula, M. S. (2009). International trends in mathematics education research. In M. Lepik (Ed.) *Teaching mathematics : retrospective and perspectives : proceedings of the 10th International Conference, Tallinn, May 14-16, 2009*, pp. 11-18. Tallinn University, Institute of Mathematics and Natural Sciences.
- Hannula, M. S. (tulossa). Matematiikan oppimisen ja opettamisen tutkimuksen kansainvälisistä trendeistä. Julkaistaan matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran 2009 vuosipäivien julkaisussa.
- Kaasila, R. (2007). Mathematical biography and key rhetoric. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 373-384. [KV19]
- Kaasila, R. & Lauriala, A. (2008). Roolien, statuksien ja normien muodostaminen kollaboratiivisessa opiskelijaryhmässä. Teoksessa A. Kallioniemi (toim.), Uudistuva ja kehittyvä ainedidaktiikka (Ainedidaktiikan symposiumi 8.2.2008, s. 559-570) Tutkimuksia 299. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Helsingin yliopisto. [A64]
- Lerman, S. (2006). Socio-cultural Research in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 347 – 366. Rotterdam: Sense.
- Malinen, P. & Kupari, P. (2003). *Miten kognitiivisista prosesseista kehiteltiin konstruktivismia. Katsaus Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimusseuran toimintaan 1983-2003*. Koulutuksen tutkimuslaitos. Jyväskylän yliopisto: Jyväskylä.
- Mariotti, M. A. (2006) Proof and proving in mathematics education. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp. 173 – 204. Rotterdam: Sense.
- Mulligan, J. & Vergnaud, G. (2006). Research on Children's Early Mathematical Development. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, pp.117 – 146. Rotterdam: Sense.
- Núñez, R. E., Edwards, L. D. & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 39, 45–65.
- Pehkonen, E. (1995). *Pupil's view of mathematics: Initial report for an international comparison project*. University of Helsinki, Department of Teacher Education. Research Report 152.
- Railo, H.M, Koivisto, M., Revonsuo, A, & Hannula, M. M. (2008). Role of attention in subitizing. *Cognition*, 107, 82-104.